ZENTRALBLATT FÜR MATHEMATIK

21. Band, Heft 1

14. September 1939

S. 1-48

Grundlagenfragen, Philosophie, Logik.

Nevanlinna, Rolf: Die Mathematik und das wissenschaftliche Denken. (Helsingfors, 23.—26. VIII. 1938.) 9. Congr. des Math. scand. 1—14 (1939).

Gödel, Kurt: Consistency-proof for the generalized continuum-hypothesis. Proc. nat. Acad. Sci., Wash. 25, 220—224 (1939).

Die neue Arbeit des Verf., welche einen wichtigen Fortschritt in der mathematischen

Grundlagenforschung bedeutet, bringt einen Widerspruchsfreiheitsbeweis für die ver-

allgemeinerte Kontinuumhypothese (abgekürzt C) und das Auswahlaxiom (R). Es wird nämlich innerhalb eines Systems der Mengenlehre, das weder C noch R voraussetzt, ein Modell angegeben, in welchem alle mengentheoretischen Axiome und die Aussagen C und R erfüllt sind. Das Modell besteht aus sämtlichen kontruierbaren Mengen. "Konstruierbar" heißt aber nicht etwa "durch endlichmalige Anwendung der Axiome definierbar", denn der Bereich solcher Mengen ist überhaupt kein Modell für die Mengenlehre. Um zu brauchbarem Konstruierbarkeitsbegriff zu gelangen, definiert Verf. eine transfinite Mengenfolge M_{ξ} , deren erstes Glied nur die Nullmenge enthält. Jedes $M_{\xi+1}$ entsteht aus M_{ξ} durch Hinzufügung der Extensionen (innerhalb M_{ε}) der Satzfunktionen mit auf M_{ε} beschränkten Quantifikatoren. Für Limeszahlen ξ ist $M_{\xi} = \sum_{\eta} M_{\eta}$. Verf. nennt eine Menge konstruierbar, wenn sie einem M_{ξ} angehört. Die Folge Me bricht natürlich nirgends ab, sie hat aber die Eigenschaft, daß gewisse ihrer Glieder Modelle für verschiedene Systeme liefern. So z. B. ist $M_{\omega_{\omega}}$ ein Modell für die Zermelosche und M_{Ω} ein Modell für die Zermelo-Fraenkelsche Mengenlehre (Ω ist die erste unerreichbare Ordnungszahl). Dies ergibt sich verhältnismäßig einfach aus folgendem fundamentalem Hilfssatz: Jede konstruierbare Teilmenge von $M_{\omega_{\alpha}}$ gehört $M_{\omega_{\alpha+1}}$ an. Wird nun mit A die Aussage: jede Menge ist konstruierbar bezeichnet, so folgen aus dem erwähnten Hilfssatz sowie aus der Wohlordnungsfähigkeit der M_ξ die Implikationen $A \to R$, $A \to C$. Man deutet nun die mengen-

Geschichtliches.

theoretische Grundrelation ε als die Relation ε des Modells $M_{\omega_{\omega}}$ bzw. M_{Ω} . Dann geht A in eine A selbst äquivalente Aussage über und R und C in Aussagen, die bzw. das Zutreffen des Auswahlaxioms und der verallgemeinerten Kontinuumhypothese im Modell $M_{\omega_{\omega}}$ bzw. M_{Ω} feststellen. Da sich die Implikationen $A \to R$, $A \to C$ aus den mengentheoretischen Axiomen allein ableiten lassen, so folgt hieraus, daß R und C

Neugebauer, O.: Über eine Methode zur Distanzbestimmung Alexandria—Rom bei Heron. II. Danske Vid. Selsk., Histor.-filol. Medd. 26, Nr 7, 1—11 (1939).

Mitteilung der beiden Figuren aus der wichtigsten Handschrift von Herons Dioptra, die in Schönes Ausgabe dieser Schrift fehlen, und Vergleich mit den Rekonstruktionen des Verf. in der ersten Mitteilung gleichen Titels (s. dies. Zbl. 19, 100). Das Vorkommen des Zeichens ↑ in einer der Figuren gibt Verf. Anlaß, seine Ansicht über die Verwendung der Episemata als mathematische Symbole, insbes. bei Diophant, zu entwickeln.

Bessel-Hagen (Bonn).

• Wieleitner, Heinrich: Geschichte der Mathematik. Bd. 1. Von den ältesten Zeiten bis zur Wende des 17. Jahrh. Bd. 2. Von 1700 bis zur Mitte des 19. Jahrh. (Samml. Göschen Bd. 226 u. 875.) Berlin: de Gruyter 1939. Bd 1/2 290 S. pro Bd RM. 1.62.

Mostowski (Warszawa).

in $M_{\omega_{\Omega}}$ und M_{Ω} erfüllt sind.

• Enriques, Federigo: Le matematiche nella storia e nella cultura. Bologna:

Nicola Zanichelli 1938. 339 pag. L. 20 .--.

Das Buch will in gemeinverständlicher Form die Fragen nach Wesen und Ursprung mathematischer Probleme, nach ihrer Bedeutung und Stellung in bezug auf die anderen Wissenschaften und die Gesamtkultur, nach ihrem erkenntnistheoretischen Gehalt behandeln. Es gliedert sich in drei Abschnitte; der erste gibt eine rasche Skizze der geschichtlichen Entwicklung der Mathematik bis zum Ende des 18. Jahrhunderts mit einer ausführlichen Schrifttumsübersicht. Der zweite Teil behandelt die Stellung der Mathematik im Gesamtbild der Naturwissenschaften, speziell der Technik, und die Frage, wieweit sie eine adäquate Darstellung des Geschehens ermöglicht; ein ausführliches Kapitel ist den Beziehungen zur Philosophie gewidmet, enthält eine Kritik der Aussagen der verschiedenen Philosophen über die Mathematik und erörtert ihre erkenntnistheoretischen Grundlagen; der Schluß dieses Teiles bespricht die Spannung zwischen mathematisch-deterministischer und historisierender Weltauffassung und gibt eine Skizze über die Psychologie des Mathematikers und seines Schaffens. Der dritte Teil geht mehr den eigentlichen Mathematiker an und handelt über einige Richtungen mathematischer Forschung im 19. Jahrhundert, nämlich die qualitative Analysis (Funktionentheorie, Differentialgleichungen, Differentialgeometrie), die Kritik der Grundlagen und damit zusammenhängend die Theorie der reellen Funktionen und schließlich die Entwicklung der projektiven und algebraischen Geometrie; den Abschluß bildet eine Übersicht über Enzyklopädien, Akademien und Zeitschriften. Da Verf. an der historischen, philosophischen und rein mathematischen Forschung eigenen großen Anteil hat, trägt das Buch dankenswerterweise in allem stark persönliches Gepräge.

Harald Geppert (Gießen).

● Hogben, L.: La matematica nella storia e nella vita. Vol. I. Traduzione dall'inglese a cura di Francesco Morra. Milano: U. Hoepli 1938. VIII, 462 pag. e 106 fig. L. 24.—.

• Castelnuovo, Guido: Le origini del calcolo infinitesimale nell'èra moderna. (Storia e la Filos. d. Math. Coll. Promossa d. Ist. Naz. p. la Storia d. Sci. Nr. 12.) Bologna: Nicola

Zanichelli 1938. 165 pag. L. 20.-.

Die vorliegende Arbeit, die der Entwicklung der Infinitesimalrechnung vom 16. Jahrh. an bis zu Newton und Leibniz gewidmet ist, schließt an einen anderen Band der gleichen Sammlung (Nr. 4) an, in dem Rufini die Methodenlehre des Archimedes einer eingehenden Untersuchung unterzog. Deshalb kann auch hier (Kap. I) Archimedes kurz abgetan werden, der einerseits mit seinen strengen "Integrationen" und andererseits mit seinen unstrengen, auf mechanischer Grundlage erdachten "Indivisibeln" am Anfang jeder geschichtlichen Betrachtung der Integralrechnung stehen wird. M. E. darf er sogar für die Geschichte der Differentialrechnung - wie es meist geschieht — nicht vergessen werden, da er in der Lage war, den Verlauf der Tangente in jedem Punkt der Spirale anzugeben. - Dann (Kap. II-IV) behandelt Verf. das Wiederauftauchen und die Weiterentwicklung Archimedischer Methoden; neben strengen Flächen- und Volumenberechnungen (z. B. bei L. Valerio und später hauptsächlich bei Fermat, Roberval, Pascal, Wallis) spielt auch wieder das Indivisibel eine hervorragende Rolle (Kepler, Cavalieri, Torricelli). Bei der Betrachtung der Originalität Cavalieris muß man m. E. noch an die Bedeutung denken, die das Indivisibel in der scholastischen Lehre des Kontinuums gespielt hat. - Kap. V und VI betrachtet die geometrische (Descartes, Fermat) und die mechanische (Galilei, Torricelli) Bedeutung der Ableitung sowie das Umkehrungsproblem (Barrow). Vielleicht hätte schärfer betont werden können, daß beim "Differentialquotienten" Fermats noch der Grenzbegriff fehlte und daß es sich nur um einen Kunstgriff handelte. In Kap. VII und VIII werden die Leistungen von Newton und Leibniz eingehend gewürdigt, worauf noch zum Schluß (Kap. IX) zusammenfassend betont wird, wie

von verschiedenen Seiten her und aus verschiedenartigen Bemühungen heraus die einzelnen Bausteine zusammengetragen und die beiden neuen Gebäude errichtet wurden, deren inneren Zusammenhang vielleicht als erster Newton seit 1665/66 erkannte. — Als Anhang sind dankenswerterweise zwei grundlegende Arbeiten von Newton und Leibniz ("Tractatus de quadratura curvarum" und "Nova Methodus pro maximis et minimis") in Übersetzung beigegeben. — Ein Index nominum, ferner Mitteilungen über die Lebensumstände der behandelten Persönlichkeiten und bibliographische Angaben bei den einzelnen Kapiteln erhöhen den Wert der Arbeit. Anzufügen wären hier vielleicht noch die neue Archimedesausgabe von Dijksterhuis (1938), dann Arbeiten von Sittignani [Sulla "geometria degli indivisibili" di B. Cavalieri. Period. Mat., IV.s. 13, 266ff. (1933)] und Wieleitner (Das Fortleben der Archimedischen Infinitesimalmethoden bis zum Beginn des 17. Jahrh. Quellen u. Stud. Gesch. d. Math. Astr. u. Phys. B I, S. 201ff.).

Lichtenstein†, Léon: L'œuvre de Laplace et le développement des sciences au XVIII e siècle. Wiadom. mat. 47, 1—86 (1939) [Polnisch].

Cet article, publié d'après le manuscrit posthume de l'auteur par S. Rosental, a été primitivement conçu comme un essai critique sur l'œuvre de Laplace dans les différents domaines de l'astronomie. Cependant, l'article n'étant pas achevé, la partie concernant le thème principal n'y est qu'esquissée. Après avoir passé en revue les grands problèmes mathématiques du XVIIIe siècle dont l'origine remonte à "Principia" de Newton, comme problème des figures d'équilibre, celui de n corps et ceux qui s'y rattachent, et discuté les résultats des mathématiciens d'alors Clairaut, d'Alembert, Euler et Lagrange concernant ces problèmes, l'auteur donne quelques renseignements sur le caractère général de l'individualité scientifique de Laplace accentuant surtout son goût pour la réalité physique et son description. Ensuite l'auteur donne une analyse du contenu de deux principaux travaux de Laplace: "Mécanique céleste" et "Exposition du Système du Monde".

Z. Waraszkiewicz (Varsovie).

Kotsakis, D.: Die Astronomie in Griechenland im 18. Jahrhundert. Meddel. Lunds astron. Observ., II. s. Nr 101, 1--7 (1939).

Loria, Gino: Charles Sturm et son œuvre mathématique. 1803—1855. Enseignement Math. 37, 249—274 (1938).

Die mit einem Bilde Ch. Sturms und dem Gesamtverzeichnis seiner Arbeiten ausgestattete Abhandlung gibt neben einer knappen Biographie eine ausfürzliche Analyse seiner publizierten und unpublizierten mathematischen Untersuchungen. Diese erstrecken sich in der Geometrie auf räumliche und ebene Polygone (vgl. dazu die Arbeit von Vivanti, dies. Zbl. 21, 51), die Theorie der Kaustiken und die Entdeckung der von den Kegelschnitten eines Büschels auf einer Geraden ausgeschnittenen Involution; die Algebra verdankt ihm die Sturmschen Ketten und die Bestimmung der Wurzelzahl eines Polynoms innerhalb eines beliebigen Gebietes der komplexen Zahlenebene, die Analysis die Oszillations- und Entwicklungssätze bei Sturm-Liouvilleschen Differentialgleichungen. Auch die Mechanik und Optik haben durch Sturm wichtige Beiträge erhalten.

Harald Geppert (Gießen).

Jelitai, József: Eine Selbsthiographie des Johann von Bolyai. Mat. természett. Ertes. 58, 35—39 u. deutsch. Zusammenfassung 40 (1939) [Ungarisch].

Bericht über Aufzeichnungen, die im Nachlaß des J. v. B. 1938 gefunden und aus mehreren Bruchstücken zusammengefügt wurden.

Ullrich (Gießen).

Langer, R. E.: Josiah Willard Gibbs. Amer. Math. Monthly 46, 75-84 (1939).

Bassi, A.: L'università e la scuola di matematica di Princeton. Period. Mat., IV. s. 19, 57—79 (1939).

Algebra und Zahlentheorie.

Lineare Algebra, Polynome, Invariantentheorie:

Rados, Gustav: Ein Beitrag zur Theorie der unitären Substitutionen. Mat. természett. Értes. 58, 10-11 u. deutsch. Zusammenfassung 12 (1939) [Ungarisch].

Verf. zeigt, daß die n-dimensionale unitäre Substitution

$$y'_k + iy''_k = \sum_{l=1}^n (a'_{kl} + ia''_{kl})(x'_l + ix''_l)$$
 $(k = 1, ..., n)$

mit der reellen orthogonalen Substitution

$$y'_k = \sum_{l=1}^n (a'_{kl}x'_l - a''_{kl}x''_l), \quad y''_k = \sum_{l=1}^n (a''_{kl}x'_l + a'_{kl}x''_l)$$

H. L. Schmid (Gießen). gleichbedeutend ist.

Rados, Gustav: Über zyklische orthogonale Substitutionen. Acta Litt. Sci. Szeged

9, 103—109 (1939). Es sei (S) $y_i = \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_j$ (i = 1, ..., n) eine reelle orthogonale Substitution. Verf. gibt notwendige und hinreichende Kriterien für die Zyklizität von S durch arithmetische Eigenschaften der Koeffizienten c_{ij} . S besitze die Eigenschaft E, wenn c_{ij} algebraisch und total reell und die Koeffizienten der charakteristischen Gleichung von S ganz algebraisch sind. Verf. zeigt, unter Benutzung von Sätzen von Frobenius (J. f. Math. 84, 52) und Kronecker (J. f. Math. 53, 173—175), daß die Eigenschaft E für die Zyklizität von S hinreichend ist. Dagegen ist E für die Zyklizität von S nicht notwendig. Es gilt: S ist dann und nur dann zyklisch, wenn eine reelle orthogonale Substitution T existiert, so daß die Substitution $T^{-1}ST$ die Eigenschaft E besitzt. Dieses Kriterium folgt im wesentlichen aus einem Satz von Stickelberger über die Zerlegung von T in binäre Substitutionen. H. L. Schmid (Gießen).

Wolf, Margarete C.: Transformation of bases for relative linear sets. Bull. Amer. Math. Soc. 44, 716-718 (1938).

Im Anschluß an eine frühere Arbeit von M. H. Ingraham und der Verf. (dies. Zbl. 17, 99) werden einfache notwendige und hinreichende Bedingungen dafür angegeben, daß durch Transformation aus einer Basis eines Vektorraumes bezüglich einer gegebenen Matrix in einem Körper wiederum eine Basis entsteht.

Wolfgang Franz (Gießen).

McCoy, Neal H.: Concerning matrices with elements in a commutative ring. Bull. Amer. Math. Soc. 45, 280-284 (1939).

Es werden einige elementare Sätze über die charakteristische Funktion und das Minimalpolynom einer Matrix, die man gewöhnlich nur für Matrizen aus Körperelementen beweist, auf den Fall übertragen, daß die Elemente der betrachteten Matrizen einem beliebigen kommutativen Ring angehören. Wesentlich neue Beweisgedanken treten dabei nicht auf. Krull (Bonn).

Williamson, John: On the determinant of an automorph of a nonsingular skewsymmetric matrix. Bull. Amer. Math. Soc. 45, 307-309 (1939).

Wenn G die schiefsymmetrische 2n-reihige Matrix $G = \begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix}$ mit den n-reihigen Null- und Einheitsmatrizen 0 und E bezeichnet, so werden die Substitutionen F mit FGF'=G betrachtet. Daß die Determinante |F|=+1, hat schon Frobenius bewiesen (Crelles J. 86, 44), doch benutzte er hierzu die Elementarteilertheorie. Verf. liefert einen rein rationalen Beweis für die Gleichung |F| = +1, welcher also in jedem Körper gültig ist. Zunächst zeigt man, daß |F| = +1, wenn die n-reihige Hauptunterdeterminante $|F_{11}| \neq 0$. Sodann werden durch Einführung elementarer Umformungen über weitere vier Hilfssätze Substitutionen F mit $|F_{11}| = 0$ auf daraus hergeleitete F^* mit $|F_{11}^*| \neq 0$ und $F^*GF^{*\prime} = G$ zurückgeführt. Landherr (Rostock).

Abstrakte Theorie der Ringe, Körper und Verwandtes:

MacLane, Saunders: Subfields and automorphism groups of p-adic fields. Ann. of Math., II. s. 40, 423-442 (1939).

In einer früheren Arbeit (vgl. dies. Zbl. 19, 49) hat Verf. die wichtige Bemerkung gemacht, daß bei der Konstruktion eines diskret bewerteten perfekten Körpers zu gegebenem Restklassenkörper die inseparablen algebraischen Erweiterungen keinerlei Schwierigkeit machen. Es ist also verhältnismäßig leicht, zu sehen, daß es (auch im charakteristikungleichen Fall) zu jedem Restklassenkörper einen diskret bewerteten perfekten Körper gibt. Auf dieser Grundlage werden hier auch die Eindeutigkeitssätze abgeleitet, besonders für den p-adischen (charakteristikungleichen absolut unverzweigten) Fall. Im Anschluß an eine Arbeit des Ref. (Crelle 176, 141) werden dazu das multiplikative Repräsentantensystem und eine p-Basis des Restklassenkörpers herangezogen, aber nicht der Wittsche Formalismus, den Verf. "sophisticated" nennt und konsequent umgeht. So erhält man alle Struktursätze (einige, die fehlen, lassen sich nach denselben Methoden beweisen), aber natürlich keine expliziten Formeln. — Bemerkenswert ist folgender Isomorphiesatz: K und K' seien relativ unverzweigte perfekte Oberkörper eines diskret bewerteten perfekten Körpers k; \Re , \Re' und \mathfrak{k} seien die Restklassenkörper. Wenn ein Isomorphismus $\Re \cong \Re'$ i. b. a. \mathfrak{k} gegeben ist, gehört er jedenfalls dann zu einem analytischen Isomorphismus $K \cong K'$ i. b. a. k, wenn folgende zwei Bedingungen erfüllt sind: 1. k ist unverzweigt über einem charakteristikungleich diskret bewerteten perfekten Körper k_0 mit vollkommenem Restklassenkörper (z. B. wenn k absolut unverzweigt ist; dann ist fo der Primkörper); 2. p-unabhängige Elemente von f sind auch in R p-unabhängig (z. B., wenn R aus f durch separabel-algebraische Erweiterung oder Adjunktion einer Unbestimmten oder Adjunktion einer Unbestimmten mitsamt ihren p-ten, p2-ten, ... Wurzeln entsteht oder durch mehrere [auch transfinit viele] solche Erweiterungen oder wenn f vollkommen ist). — Ein diskret bewerteter perfekter Körper enthält zu jedem Unterkörper des Restklassenkörpers einen Teilkörper, über dem er unverzweigt ist, mit diesem Teilrestklassenkörper. Dieser ist unter gewissen Voraussetzungen eindeutig bestimmt. — In einem (perfekten) p-adischen Körper K werden für $m \ge 1$ die Gruppen G_m aller analytischen Automorphismen bestimmt, die alle Restklassen des Bewertungsrings nach der m-ten Potenz seines Primideals invariant lassen (evtl. auch nur Automorphismen i. b. a. einen Unterkörper k, wo die Voraussetzungen des obigen Isomorphiesatzes erfüllt sind); der Körper der Elemente von K, die bei all diesen Automorphismen festbleiben, ist der eindeutig bestimmte perfekte Unterkörper, dessen Restklassenkörper der größte vollkommene Unterkörper des Restklassenkörpers von K ist, unabhängig von m.

Maksimoff, I.: Sur l'algèbre des nombres permanents. Bull. Soc. phys.-math.

Kazan, III. s. 10, 51-92 u. franz. Zusammenfassung 92 (1938) [Russisch].

Es werden die Zahlen des durch die Multiplikationstabelle $\varepsilon_i^2 = 0$, $\varepsilon_i \varepsilon_k = \varepsilon_k \varepsilon_i$ über dem Körper der komplexen Zahlen definierten hyperkomplexen Zahlensystems untersucht; Verf. nennt sie vorzeichenbeständige Zahlen (= nombres permanents). Hauptergebnis: Zu einem Polynom $P(x_1, \ldots, x_n)$ vom Grade m mit komplexen Zahlkoeffizienten gibt es vorzeichenbeständige Zahlen $\alpha \neq 0, \beta_1, \ldots, \beta_n$ so, daß $\alpha P(x_1, \ldots, x_n) = (\beta_1 x_1 + \cdots + \beta_n x_n)^m$ ist. Eichler (Göttingen).

Everett jr., C. J.: Rings as groups with operators. Bull. Amer. Math. Soc. 45,

274—279 (1939).

Es sei M ein beliebiger Modul, also eine additiv geschriebene Abelsche Gruppe, Ω bedeute den — i. a. nichtkommutativen — Endomorphismenring (Automorphismenring) von M. Dann gilt der Satz: Macht man M durch Einführung einer assoziativen und distributiven Multiplikation zu einem Ringe R (mit oder ohne Einheitselement), wobei außer 0 in R kein Element x für jedes a der Gleichung $x \cdot a = 0$ genügen möge, so ist R stets zu einem Unterring $\Omega(R)$ von Ω isomorph. Dieses "Fundamentaltheorem" benutzt Verf. als Ausgangspunkt für einige Bemerkungen über lineare

Algebren, über endliche Ringe und ihre direkten Summenzerlegungen sowie über "elementare Moduln", d. h. über solche Moduln M, die als Operatorgruppen zu ihren Endomorphismenringen Ω operatorisomorph sind. Was den letzten Punkt angeht, so wird z. B. festgestellt, daß eine endliche Abelsche Gruppe nur dann einen elemen-Krull (Bonn). taren Modul bildet, wenn sie zyklisch ist.

Zahl- und Funktionenkörper:

Hasse, H.: Simultane Approximation algebraischer Zahlen durch algebraische

Zahlen. Nachr. Ges. Wiss. Göttingen I, N. F. 1, 209-212 (1939).

Beweisandeutung und erklärende Bemerkungen zu folgender Verallgemeinerung des Thue-Siegelschen Satzes, deren Beweis demnächst in den Mh. Math. Phys. erscheinen wird: Es sei R ein endlich-algebraischer Zahlkörper und es seien $\alpha_1, ..., \alpha_g$ algebraische Zahlen vom Körpergrad r und Simultangrad d über K. Wenn dann für eine unendliche Folge ${\mathfrak X}$ von verschiedenen Zahlsystemen x_1,\ldots,x_g aus ${\mathfrak R}$ gilt

$$|x_i - \alpha_i| \leq \frac{C}{H^{\varepsilon}}$$
 $(i = 1, 2, ..., g)$ (1)

wo H die Höhe von x_1, \ldots, x_g ist und C, ε von x_1, \ldots, x_g unabhängige positive Zahlen $\varepsilon \leq \min_{\delta = 0, 1, ..., d-1} \left(\delta + r \middle| \begin{pmatrix} g + \delta \\ g \end{pmatrix} \right).$ sind, so ist notwendig (2)

Durch Bestimmung desjenigen δ , das in (2) das Minimum liefert, und durch Abschätzung dieses Minimums leitet Verf. einige Folgerungen des Hauptsatzes her, u.a.:

Gilt (1) für eine unendliche Folge $\mathfrak X$ und ist $d \ge (g \, g! \, r)^{\overline{g+1}}$, so ist notwendig

$$\varepsilon < \left(1 + \frac{1}{g}\right) (gg! r)^{\frac{1}{g+1}}.$$

Erklärungen: Der Körpergrad von $\alpha_1, \ldots, \alpha_g$ ist der Relativgrad r des Körpers $\Re (\alpha_1, \ldots, \alpha_g)$ über \Re . Der Simultangrad von $\alpha_1, \ldots, \alpha_g$ über \Re ist die kleinste natürliche Zahl d mit der Eigenschaft, daß die $\binom{g+d}{g}$ Potenprodukte der Dimensionen $0, 1, \ldots, d$ von $\alpha_1, \ldots, \alpha_g$ linear-abhängig über \Re sind. Die Höhe des Systems x_1, x_2, \ldots, x_g ist die positive Zahl

$$H = \frac{N\left(\operatorname{Max}(1, |x_1|, \ldots, |x_g|)\right)}{N(1, x_1, \ldots, x_g)},$$

 $H = \frac{N\left(\operatorname{Max}(1, |x_1|, \ldots, |x_g|)\right)}{N(1, x_1, \ldots, x_g)},$ wo im Nenner die Norm des Ideals $(1, x_1, \ldots, x_g)$ und im Zähler das Produkt der Betragsmaxima der Konjugierten gemeint ist, also:

onjugierten gemeint ist, also: $N\left(\operatorname{Max}(1, |x_1|, \ldots, |x_g|)\right) = \prod_{\kappa=0}^{k=1} \operatorname{Max}(1, |x_1^{(\kappa)}|, \ldots, |x_g^{(\kappa)}|).$ J. F. Koksma (Amsterdam).

Chabauty, Claude: Démonstration d'un théorème de Thue, indépendante de la théorje des approximations diophantiennes. C. R. Acad. Sci., Paris 208, 1196-1198 (1938).

Neue Beweismethode, u. a. für den Thueschen Satz: Notwendig und hinreichend dafür, daß $\alpha y + x$ für unendlich viele ganzrationale x, y Einheit ist, ist, daß α eine reelle quadratische Irrationalzahl oder eine rationale Zahl ist. Verf. behauptet, daß seine Methode ebenfalls zu einem neuen Beweise und Verallgemeinerungen der Mahlerschen P-adischen Verallgemeinerung des obigen Thueschen Satzes führt (dies. Zbl. 6, 105). S. auch dies. Zbl. 19, 3. J. F. Koksma (Amsterdam).

Bauer, Michael: Zur Theorie der Kreiskörper. Acta Litt. Sci. Szeged 9, 110-112 (1939).

Es sei R der Körper der rationalen Zahlen, ω eine primitive m-te Einheitswurzel, F(x) = 0die irreduzible Gleichung für ω vom Grade $\varphi(m)$, D die Diskriminante von F(x) und d die Diskriminante von $R(\omega)$. Verf. gibt einen neuen Beweis für die bekannte Tatsache, daß die Zahlen $1, \omega, \ldots, \omega^{\varphi(m)}$ eine Minimalhasis von $R(\omega)$ bilden. Da $D=dk^2$ (k ganz rational) ist, genügt es zu zeigen, daß D keine außerwesentlichen Diskriminantenteiler (Teiler von k) besitzt. Dies gelingt Verf. sehr einfach durch Anwendung eines Dedekindschen Kriteriums über außerwesentliche Diskriminantenteiler und des Schönemannschen Irreduzibilitätskriteriums.

H. L. Schmid (Gießen).

Rédei, Ladislaus: Ein neues zahlentheoretisches Symbol mit Anwendungen auf die Theorie der quadratischen Zahlkörper. I. J. reine angew. Math. 180, 1—43 (1939).

Deutsche zusammengefaßte Darstellung dreier ungarischer Arbeiten des Verf. S. dies. Zbl. 19, 4, 5 u. 20, 101.

Reichardt (Leipzig).

Billing, Gunnar: Vom Range kubischer Kurven vom Geschlecht Eins in algebraischen Rationalitätsbereichen. (*Helsingfors*, 23.—26. VIII. 1938.) 9. Congr. des Math. scand. 146—150 (1939).

Alle Punkte einer Kurve vom Geschlecht 1, deren Koordinaten einem Zahlkörper Kangehören, bilden eine Gruppe. Unter dem Rang der Kurve in bezug auf K soll die Minimalzahl der Basiselemente der Gruppe verstanden werden. Es werden obere Grenzen des Ranges angegeben und gezeigt, daß man Zahlkörper angeben kann, für die es Kurven mit einem beliebig großen Rang gibt.

Hofreiter (Wien).

Châtelet, François: Classification des courbes de genre un, dans le corps des restes,

module p. C. R. Acad. Sci., Paris 208, 487-489 (1939).

Es handelt sich um die Klassifikation der Kurven vierter Ordnung vom Geschlechte 1, die durch eine Gleichung

$$y^2 = a x^4 - b x^2 - c x - d$$

im Primkörper k der Primzahlcharakteristik p definiert werden nach birationaler Äquivalenz. Offenbar gibt es nur endlich viele solche Kurven. Die rationalen Punkte auf einer solchen Kurve bilden eine Gruppe, die das direkte Produkt einer Gruppe ungerader Ordnung mit 0, 1 oder zwei zyklischen 2-Gruppen. Aus diesem Satze schließt der Verf., daß auf der oben hingeschriebenen Kurve stets mindestens ein rationaler Punkt liegt.

Deuring (Jena).

Müller, Hans Robert: Die Verzweigungsgruppen algebraischer Funktionen zweier Veränderlicher, deren Diskriminanten in Linearfaktoren zerfallen. Jber. Deutsch.

Math.-Vereinig. 49, Abt. 1, 10-19 (1939).

Im Raume der Variablen x, y wird die Schar der Ebenen x = konst. = t betrachtet und in jeder dieser Ebenen eine durch die Schnittpunkte mit den Geraden der Diskriminante gehende Aufschneidung vorgenommen, die mit t im allgemeinen stetig variiert. Die Veränderung, die diese Aufschneidung erleidet, wenn t einen x-Wert umkreist, der einem Verzweigungspunkt 2. Art entspricht, ergibt Relationen zwischen den Erzeugenden der Verzweigungsgruppe, welche die Verzweigungsgruppe auch im Großen beschreiben.

Eichler, M.: Zum Hilbertschen Irreduzibilitätssatz. Math. Ann. 116, 742-748 (1939). Ein neuer Beweis des Hilbertschen Irreduzibilitätssatzes in zwei Variablen über einen algebraischen Zahlkörper k, welcher nicht wie der ursprüngliche Hilbertsche Beweis und seine späteren Vereinfachungen an den Koeffizienten der Puiseuxschen Reihenentwicklung arbeitet, sondern in naturgemäßer Weise die Begriffe der algebraischen Funktionenkörper benutzt. Es werden unendlich viele Primdivisoren 1. Grades x in k(x) angegeben, welche in dem durch das gegebene Polynom f(x, y)definierten Funktionenkörper K = k(x, y) Primdivisoren bleiben. Dabei ist f(x, y) als absolut irreduzibel vorausgesetzt. Dann wird K durch den Übergang zu den Restklassen mod x auf einen algebraischen Erweiterungskörper k' von k vom Grade n abgebildet, wenn f(x, y) in y vom Grade n ist. Ist dann $x \equiv a \mod x$, so erweist sich f(a, y), als erzeugende Gleichung vom Grade n von k' über k, als irreduzibel über k. — Besonderes Interesse darf ein Hilfssatz beanspruchen, nach welchem ein absolut irreduzibles Polynom f(x, y) aus k beim Übergang zum Restklassenkörper k_p nach einem Primideal p von k, von endlich vielen p abgesehen, in k, absolut irreduzibel bleibt. Wolfgang Franz.

Zahlentheorie:

Lehmer, D. H.: A factorization theorem applied to a test for primality. Bull. Amer. Math. Soc. 45, 132—137 (1939).

Verf. hat in früheren Arbeiten [s. z. B. Bull. Amer. Math. Soc. 33, 331 (1927)]

eine Reihe von Sätzen bewiesen, die zur Prüfung der Primzahleigenschaft einer großen Zahl N geeignet sind. Folgender Satz erweist sich für die Primzahlprobe besonders brauchbar: Ist p eine Primzahl und gilt $p^{\alpha}/N-1$, $N/a^{N-1}-1$, $(N,a^{(N-1)/p})=1$, so sind alle Teiler von N von der Form $p^{\alpha}x+1$. — Das Problem der Primzahlprobe von N ist hiernach eng verknüpft mit der Produktzerlegung von N-1. Ist insbesondere N Teiler einer Zahl von der Form y^n-1 , so ist es möglich, die Zerlegung von N-1 auf die Faktorenzerlegung von y^k-1 (k< n) zurückzuführen. Verf. gibt eine Theorie der Faktorenzerlegung von y^n-1 und zeigt an Beispielen, wie daraus in Verbindung mit obengenanntem Satz sehr wirksame Primzahlproben durchgeführt werden können. H.L. Schmid (Gießen).

Skolem, Th.: Über die Lösbarkeit der Gleichung $f_1(x) F_1(x) + \cdots + f_n(x) F_n(x) = 1$, wo f_1, \ldots, f_n gegebene ganzzahlige Polynome sind, in ganzzahligen Polynomen

 F_1, \ldots, F_n . Norske Vid. Selsk., Forh. 12, Nr 1, 1—4 (1939).

Verf. beweist in Fortsetzung einer früheren Arbeit (s. dies. Zbl. 16, 245) folgenden Satz: $f_1(x), \ldots, f_n(x)$ seien ganzzahlige Polynome mit Koeffizienten aus einem endlichen algebraischen Zahlkörper k. Es sei K ein Oberkörper von k, in dem f_1, \ldots, f_n in ganzzahlige Linearfaktoren zerfallen. Dann und nur dann existieren Polynome

 $F_1(x), \ldots, F_n(x)$ derart, daß $\sum_{\nu=1}^n f_{\nu}(x) F_{\nu}(x) = 1$ identisch gilt, wenn für jede ganze Zahl x aus K der gr. g. T. $(f_1(x), \ldots, f_n(x)) = 1$ ist. — Der Beweis gelingt schrittweise, indem für (f_1, \ldots, f_n) zuerst das System $(ax + b, c_2, \ldots, c_n)$, dann das System $(a_1x + b_1, \ldots, a_nx + b_n)$ betrachtet wird. H.L. Schmid (Gießen).

Wylie, Shaun: A note on Bauer's identical congruence. J. London Math. Soc. 14,

82-83 (1939).

 $F_m(x)$ bezeichne das Produkt $\Pi(x-t)$ über alle t mit (t,m)=1 und 0< t< m. Die Kongruenz $x^{p-1}-1\equiv (x-1)\dots (x-(p-1))$ mod p (p Primzahl) besitzt folgende Verallgemeinerung für beliebiges m statt p: Gilt p^α/m , so ist (1) $F_m(t)\equiv (x^{p-1}-1)^{\varphi(m)/p-1}$ mod p^α für p>2, (2) $F_m(t)\equiv (x^2-1)^{\varphi(m)/2}$ mod 2^α für p=2 (identische Kongruenz von Bauer; s. z. B. Hardy and Wright, An introduction to the theory of numbers, S. 97). Verf. zeigt, daß für $m=2^\alpha m'$, m' ungerade, (2) gleichbedeutend mit (1) ist. Durch Binomialentwicklung von $(x^2-1)^{\varphi(m)/2}$ gelingt eine Zusammenfassung der Formeln (1) und (2). H. L. Schmid.

Heawood, P. J.: The law of quadratic reciprocity. Math. Gaz. 23, 198—200 (1939). Geometrische Einkleidung des quadratischen Reziprozitätsgesetzes: Es seien p > q zwei Primzahlen. Von einem festen Punkt eines Kreises vom Umfang p trage man in einer bestimmten Richtung p Kreisbogen der Länge $q, 2q, \ldots, pq$ ab. q ist quadratischer Rest oder Nichtrest, je nachdem die Anzahl r der Kreispunkte von $q, 2q, \ldots, \frac{p-1}{2}q$ im unteren Halbkreis gerade oder ungerade ist [Gaußsches Lemma $\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{p}$].

Avakumović, Vojislav G.: Über die Anzahl der Zahlen $\equiv -1 \pmod{d}$, die keinen Primteiler derselben Form haben. Publ. Math. Univ. Belgrade 6/7, 48—60 (1938).

Denote by $A_d(x)$ the number of integers dn-1 $(n=1,2,\ldots)$ not exceeding x and having no prime factor of that form. It is proved by elementary methods (not using Dirichlet's theorem on primes in an A.P.) that $A_d(x) \to \infty$ as $x \to \infty$, except that $A_d(x) = 0$ if d=2, 3, 4, 6. By analytic methods is proved $A_5(x) \sim Ax/(\log x)^4$ being a given constant.

G. Pall (Montreal).

Walfisz, Arnold: Zur additiven Zahlentheorie. V. Trav. Inst. Math. Tbilissi 5, 69-112 (1938).

The author gives a list of known formulae for $r_{2s}(n)$, the number of representations of n as the sum of 2s squares. "Elementary" proofs of these formulae are known for $s \le 8$ and the author gives such proofs for $9 \le s \le 24$. The method is that given by H. Bessel in his dissertation (Borna-Leipzig: Robert Noske 1929). (III. u. IV. see this Zbl. 18, 345.)

Wright (Aberdeen).

Walfisz, Arnold: Zur additiven Zahlentheorie. VI. Trav. Inst. Math. Tbilissi 5, 197-253 (1938).

The author gives a list of 32 quaternary quadratic forms Q_j ($1 \le j \le 32$) and considers $R_j(n)$ the number of representations of n in the form Q_j . A very large number of formulae for particular $R_j(n)$ are deduced from the well-known identity

$$\{T(\theta)\}^2 = \left(\frac{1}{4}\cot\frac{\theta}{2}\right)^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n \cos n\theta}{(1-x^n)^2} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \, x^n (1-\cos n\theta)}{1-x^n}$$
 and the analogous identity
$$T(\theta) \, T(2\theta) = \frac{1}{16}\cot\frac{\theta}{2}\cot\theta + \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \, x^n (1-\cos n\theta)}{1-x^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n \cos n\theta}{(1-x^n)^2} + \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n \cos 2n\theta}{(1-x^n)^2}$$

proved here by the author. In these formulae $T(\theta)$ is defined by

$$T(\theta) = \frac{1}{4}\cot\frac{1}{2}\theta + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n \sin n\theta}{1 - x^n}.$$
 Wright (Aberdeen).

Corput, J. G. van der: Contribution à la théorie additive des nombres. VI. Akad.

Wetensch. Amsterdam, Proc. 42, 336-345 (1939).

Die in Teil V (dies. Zbl. 20, 344) für fast alle Zahlen t eines Bereiches E gewonnene asymptotische Darstellung der Anzahl F(t) der Zerfällungen $t=Kp+\psi(p')$ folgt vermöge eines schon am Schluß des Teils IV (dies. Zbl. 20, 4) vorgekommenen Beweisganges aus einem Satz über die Quadratsumme der Abweichungen zwischen F(t) und der asymptotischen Näherungsfunktion. Dieser schon in Teil V formulierte Satz wird hier unter Benutzung zweier dortigen Hilfssätze bewiesen. Die Reihe gleichbetitelter Veröffentlichungen schließt damit ab; allgemeinere Sätze in derselben Richtung, insbesondere zur Erlangung der weiteren in der Einleitung (Teil I, dies. Zbl. 18, 245) angekündigten Ergebnisse, werden einer späteren Arbeit vorbehalten.

W. Weber (Berlin).

Skolem, Th.: Einiges über die Aufspaltung der natürlichen Zahlen in die Summe von zwei Quadraten. Norsk mat. Tidsskr. 21, 49—55 (1939) [Norwegisch].

Vollständiger Bericht über die Darstellung einer natürlichen Zahl n als Summe zweier relativ-primer Quadratzahlen und die Lösungsanzahl der Gleichung $n = x^2 + y^2$. Die elementaren Beweise sind wegen ihrer Kürze und Einfachheit auch für den Kenner dieser Theorie von Interesse.

H. L. Schmid (Gießen).

Bang, A. S.: Über Summen von fünften Potenzen. (Helsingfors, 23.-26. VIII.

1938.) 9. Congr. des Math. scand. 292-296 (1939).

Aus 4 Identitäten (die 3-te stimmt jedenfalls für a=1, b=0 und a=0, b=1 nicht) wird bewiesen, daß $a_1^5+\cdots+a_y^5=b_1^5+\cdots+b_x^5$ für x+y>5 in positiven ganzen Zahlen lösbar ist.

N. G. W. H. Beeger (Amsterdam).

Gupta, Hansraj: Waring's theorem for powers of primes. J. Indian Math. Soc.,

N. s. 3, 136—145 (1938).

Let W(i,j) be the integer between i and j requiring the greatest number of twelfth powers of primes, M(i,j) the number of twelfth powers required for W(i,j). Let $a_r = p_r^{12}$, p_r the rth prime. Then $W(1, a_2) = 128a_1 + 4095$, $M(1, a_2) = 4223$; ...; $M(3a_4, a_5) = 1472$. Hence 1670 such powers suffice up to 10^{48} . G. Pall (Montreal).

Kloosterman, H. D.: On the singular series in Waring's problem and in the problem of the representation of integers as a sum of powers of primes. Akad. Wetensch. Amster-

dam, Proc. 42, 167-172 (1939).

A simple proof of Hardy and Littlewood's Theorem 2 in: Some Problems of "Partitio Numerorum" IV [Math. Z. 12, 166—188 (1922)]. The original arguments about the number of solutions of certain congruences have been replaced by some much simpler lemmas about the generalized Gaussian sums. The author shows too that the

same method is also applicable to the singular series in the problem of the representation of integers as a sum of powers of primes. J. F. Koksma (Amsterdam).

Parker, W. V., and A. A. Aucoin: Solution of a cubic diophantine equation. Tôhoku

Math. J. 45, 324—328 (1939).

Lösung von $(ax + by)(mx^2 + nxy + py^2) = (cu + dv)(mu^2 + nuv + pv^2)$. N. G. W. H. Beeger (Amsterdam).

Candido, Giacomo: |Soluzioni intere delle equazione indeterminata $\sqrt[4]{x+\sqrt{y}}$

 $+\sqrt[n]{x-\sqrt{y}}=z$. Boll. Un. Mat. Ital., II. s. 1, 128—132 (1939). Die im Titel angegebene Gleichung besitzt in reellen Zahlen die Lösung: $x=\frac{1}{2}V_n(p,q)$; $y=\frac{1}{4} \Delta U_n(p,q)^2=\frac{1}{4} V_n(p,q)^2-q^n$; z=p. Dabei ist $\Delta=p^2-4q\ge 0$, x_1,x_2 bedeuten die Wurzeln der Gleichung $x^2-px+q=0$ und $V_n(p,q)=x_1^n+x_2^n$, $U_n(p,q)=(x_1^n-x_2^n):(x_1-x_2)$. Jedem reellen Zahlenpaar p,q, für das $\Delta\ge 0$ ist, entspricht hiernach eine reelle Lösung der Titelgleichung. Sind p,q ganze Zahlen, so gilt dasselbe von $V_n(p,q)$ und $U_n(p,q)$. Verf. beweist, daß bei geradem p die angegebene Lösung für jedes n ganzzahlig ist, während sie für ungerades p nur dann ganzzahlig ausfällt, wenn n durch 3 teilbar ist. Für n=3 erhält man die von P. Cattaneo (Boll. Un. Mat. Ital. 1938, 123) angegebene Lösung. M. Cipolla.

Rigge, Olov: Über ein diophantisches Problem. (Helsingfors, 23.-26. VIII. 1938.)

9. Congr. des Math. scand. 155-160 (1939).

Es wird folgender Satz bewiesen: Es sei n eine natürliche Zahl >1, c eine ganze Zahl, die durch keine Primzahl größer als $\frac{n}{2}$ teilbar ist, dann ist

$$c(x+1) (x+2) \dots (x+n) = y^2$$

nur dann in ganzen Zahlen x und y lösbar, wenn y = 0 ist. Der Beweis wird auf den Hilfssatz zurückgeführt, daß in der Zahlenfolge $x+1, x+2, \ldots x+n$, (x ganz), $x \ge n \ge 2$ wenigstens eine Zahl durch eine Primzahl $\ge n$ in exakt ungerader Potenz teilbar ist. Hlawka (Wien).

Aucoin, A. A., and W. V. Parker: Diophantine equations whose members are homo-

geneous. Bull. Amer. Math. Soc. 45, 330-333 (1939).

Sind $f(x_1, \ldots x_r)$ und $g(y_1, \ldots y_s)$ homogene Polynome mit ganzzahligen Koeffizienten und sind die Grade m und n relativ prim, so hat die Gleichung f = g die ganzzahligen Lösungen $x_i = \alpha_i f(\alpha_1, ..., \alpha_r)^{n-p} g(\beta_1, ..., \beta_s)^p$, $y_j = \beta_j f(\alpha_1, ..., \alpha_r)^{m-q} g(\beta_1, ..., \beta_s)^q$, α_i , β_i beliebig ganz, $0 \le p \le n$, $0 \le q \le m$, mp - nq = 1. — Erweiterung auf nicht-N. G. W. H. Beeger (Amsterdam). homogene Gleichungen.

Teghem, Jean: Sur un type d'inégalités diophantiennes. Akad. Wetensch. Amster-

dam, Proc. 42, 147—157 (1939).

Wenn man in den Beweisen die damals bekannten Sätze über die Abschätzung Weylscher Summen $\sum_{x=a}^{b} e^{2\pi i h f(x)}$ (h ganz rational $\neq 0$, f(x) ein Polynom)

durch die neueren Ergebnisse Vinogradows ersetzt, lassen sich verschiedene Sätze des Ref. über die Lösungsanzahl diophantischer Ungleichungen der Gestalt

$$0 < f(x) < \frac{c}{x^{\lambda}} \pmod{1} \tag{1}$$

(c und λ konstant >0) beträchtlich verschärfen. (Ausführliche Literaturübersicht im Bericht des Ref.: Diophantische Approximationen. Berlin 1936. Kap. IX, X.) Verf. zeigt mehrere Sätze im Fall, daß der Koeffizient im Gliede höchsten Grades des Polynoms f(x) eine reelle Irrationalzahl ist und leitet hinreichende Bedingungen dafür her, daß (1) unendlich viele Lösungen in ganzen rationalen x>0 besitzt. Überdies betrachtet er die Ungleichung (?) im Fall $f(x) = x^{\alpha} \log x$. J. F. Koksma.

Jarník, Vojtěch: Sur un théorème de M. Mahler. Čas. mat. fys. 68, 59-60 (1939). Mit Hilfe des nach einer Mordellschen Methode (dies. Zbl. 9, 153) angewandten Schubfachprinzips, zeigt Verf. den folgenden Satz, in dem das Mahlersche P-adische Analogon des Minkowskischen Linearformensatzes (dies. Zbl. 10, 198) enthalten ist: Sei M ein (abgeschlossener und beschränkter) konvener Körper im R, mit Mittelpunkt im Ursprung O und mit Volumen 2^nA . Sei m eine natürliche Zahl und für $i=1,2,\ldots,m,$ p_i eine Primzahl, f_i eine nicht-negative ganze rationale Zahl und $L_i(x) = L_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ eine Funktion, die jedem n-Tupel (x_1, x_2, \ldots, x_n) ganzer pi-adischer Zahlen eine ganze pi-adische Zahl zuordnet und für die überdies aus $L_i(x) - L_i(y) \equiv 0 \pmod{p_i^{\ell_i}} \quad \text{folgt:} \quad L_i(x-y) \equiv 0 \pmod{p_i^{\ell_i}}.$ $A \ge p_1^{f_1} p_2^{f_2} \dots p_m^{f_m}$. Dann enthält M wenigstens einen Gitterpunkt $(x_1, x_2, \dots, x_n) \ne 0$ mit der Eigenschaft $L_i(x) \equiv 0 \pmod{p_i^{\ell_i}}$. $i=1,2,\ldots m$

J. F. Koksma (Amsterdam).

Tehudakoff, N.: On the functions $\zeta(s)$ and $\pi(x)$. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. 21, 421—422 (1938).

Improvements are obtained of results of Titchmarsh and Tchudakoff (this Zbl. 18, 389; 13, 200 and 346). As a corollary, $\zeta(s) = O(\exp \Phi(t))$, if $\sigma \ge 1 - (\lg t)^{-\eta}$, where α is an arbitrary number between $\frac{3}{4}$ and 1; $\frac{3}{4} < \eta < \alpha$; $0 < 1 - \gamma \eta < \alpha - \eta$; $\Phi(t) = O((\lg t)^{1-\gamma\eta})$. Also, $\pi(x) = \lg x + O(xe^{-c(\lg x)^{\mu}})$, μ arbitrary but less than 4/7. G. Pall (Montreal).

Titchmarsh, E. C.: On a series of Lambert's type. J. London Math. Soc. 13,

248—253 (1938). $_{\infty}$ Let $F_{\nu}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} d_{\nu}(n) e^{2\pi i n z}$, where $d_{\nu}(n)$ in the number of ways of expressing nas a product of ν factors. The behaviour of $F_2(z)$ as z tends to a rational point on the

real axis had been investigated by Estermann, and by Chowla und Walfisz (this Zbl. 6, 9). The author proves, for y > 0, $0 < \varepsilon < 1$, that

 $F_3(h/k + iy/2\pi) = (a_0 + a_1 \log y + a_2 \log^2 y)/(ky) + O(k^2 \log^2 k) + O(y^{\varepsilon} k^{2+3\varepsilon} \log k),$ $a_0 = O\{d_3(k) \log^2 k\}, \quad a_1 = O\{d(k) \log k\}, \quad a_2 = O\{d(k)\}.$ where

G. Pall (Montreal).

Lehmer, Derrick N.: Les carrés magiques de Franklin. Enseignement Math. 37, 302-317 (1938).

Franklin hat semimagische Quadrate konstruiert mit Seitenzahlen 8 und 16. Verf. verallgemeinert seine Methode auf alle Quadrate mit geraden Seitenzahlen. N. G. W. H. Beeger (Amsterdam).

Gruppentbeorie.

Touchard, Jacques: Sur les cycles des substitutions. Acta math. 70, 243-297 (1939). L'auteur a été conduit à rechercher d'une manière générale quel est le nombre u_n des substitutions de n lettres ou de n indices dont les cycles possèdent une certaine propriété. — Au § I, il précise la nature des propriétés attribuables aux cycles et établit des formules récurrentes propres au calcul numérique des nombres u_n . A l'aide de ces formules on peut, soit remonter à certaines fonctions dites génératrices, soit se borner à obtenir de proche en proche des expressions algébriques que l'auteur, avec G. Polya, désigne sous le nom d'indicateurs de cycles (Zyklenzeiger) et que J. Schur a nommé Hauptcharakteristik. Certains polynômes étudiés autrefois par Appell et en particulier les polynômes d'Hermite peuvent être considérés comme des indicateurs de cycles; l'auteur l'établit au § II. Au § III, il étend les résultats du § I à des substitutions prises dans le groupe alterné de degré n, ou dans certaines familles analogues aux ensembles des substitutions paires ou impaires. Dans les § IV et V, il définit ce qu'il entend par une substitution à cycles monotones et par cycles secondaires d'une substitution. Il y résoud relativement à ceux-ci certains problèmes traités au § I pour les cycles primaires. Par l'examen des solutions de certaines équations différentielles linéaires, du second ou du troisième ordre, ou même d'ordre supérieur, il est conduit au § VI à répartir les cycles primaires des substitutions entre diverses catégories. Enfin le § VII est consacré à quelques applications, en particulier à l'évaluation asymptotique de l'ordre moyen d'un cycle primaire ou secondaire, dans le groupe symétrique, ou encore à celle de l'ordre moyen d'un cycle appartenant à une des catégoires précédentes.

S. Bays (Fribourg).

Tschernikow, S.: Zum Theorem von Frobenius. Rec. math. Moscou, N. s. 4,

531-537 u. deutsch. Zusammenfassung 538-539 (1938) [Russisch].

Es werden Verallgemeinerungen eines Satzes von Frobenius gegeben. Satz 1: Die Anzahl der Elemente einer Gruppe G, die gleichzeitig den Relationen $x^{r_i} \in A_i$ $(i=1,2,\ldots m)$ genügen, wobei die A_i invariante Komplexe aus lauter Elementen von endlicher Ordnung sind, ist entweder unendlich oder durch den g.g.T. der Zahlen $r_1, r_2, r_3, \ldots r_m$ und der Ordnung einer beliebigen endlichen Untergruppe U teilbar. — Der Beweis des Satzes stützt sich auf die Arbeit: dies. Zbl. 19, 200. Als Folgerung ergibt sich, daß der angegebene Satz richtig bleibt, wenn bei sonst ungeänderten Voraussetzungen nur gefordert wird, daß wenigstens eine der Relationen $x^{r_i} \in A_i$ erfüllt ist. Umständlicher auszusprechende Sätze und Folgerungen schließen sich an.

Zassenhaus (Hamburg).

Dubuque, P.: Sur le nombre des éléments d'un groupe qui vérifient certaines con-

ditions. Rec. Math. Moscou, N. s. 4, 515-519 (1938).

Für den Satz von Frobenius für die Anzahl derjenigen Elemente einer Gruppe, deren Ordnung Teiler der Ordnung der Gruppe ist, wird die weitere Verallgemeinerung gegeben (dies. Zbl. 18, 204): Seien $\mathfrak A$ und $\mathfrak A$ zwei Klassen konjugierter Elemente der Ordnungen a bzw. m der Gruppe $\mathfrak B$ der Ordnung g, n sei Teiler von g, prim zu a und Vielfaches von m. Dann ist die Anzahl A derjenigen Elemente aus $\mathfrak B$, deren n-te Potenz in $\mathfrak A$ liegt und von denen eine gewisse Potenz in $\mathfrak A$ liegt, ein Vielfaches des größten zu m primen Teilers von n. Bei gleicher Bezeichnung gilt weiter: Nimmt man an Stelle der Klasse $\mathfrak A$ konjugierter Elemente einen Komplex $\mathfrak A$ von Elementen gleicher Ordnung m, so ist die Anzahl A gleich $\varphi(m)$. Aus diesen beiden Sätzen folgt: Die Anzahl der Elemente aus $\mathfrak B$, deren Ordnung ein Vielfaches einer gewissen Zahl m ist und deren n-te Potenz in $\mathfrak A$ liegt, ist ein Vielfaches des größten Teilers von n, der prim zu m und Vielfaches von $\varphi(m)$ ist.

J. J. Burckhardt (Zürich).

Dubuque, P. E.: Sur le normalisateur d'un élément dans un groupe fini. C. R. Acad.

Sci. URSS, N. s. 22, 103—106 (1939).

Von den zahlreichen, zum Teil recht komplizierten Resultaten der Arbeit sei das folgende hervorgehoben: Ist G eine Gruppe der Ordnung $p^{\beta}n$, wobei n und die Primzahl p teilerfremd sind, so besitzt G einen eigentlichen Normalteiler, dessen Ordnung ein Vielfaches von n ist, falls folgende Bedingung erfüllt ist: Es gibt in G ein Element A der Ordnung p, dessen Normalisator eine abelsche p-Sylowgruppe besitzt, welche kein zu A in G konjugiertes Element enthält.

Magnus.

Tchounikhin, S. A.: Über Gruppen mit vorgegebenen Untergruppen. Rec. math.

Moscou, N. s. 4, 521—528 (1938).

Beweis von Sätzen (dies. Zbl. 18, 145) über endliche Gruppen, deren Untergruppen gewisse vorgeschriebene Eigenschaften haben, mittels der Verlagerung nach einer echten Untergruppe \mathfrak{F} mod. der Kommutatorgruppe von \mathfrak{F} . Spezielle Gruppen werden solche genannt, deren sämtliche Sylowgruppen invariant sind, Gruppen vom Typus S solche nicht speziellen Gruppen, deren sämtliche echte Untergruppen speziell sind (sie sind nach O. J. Schmidt vom Typus $q^{\alpha} r^{\beta}$). Mit Gruppen vom Typus S lassen sich gewisse nicht spezielle Gruppen mit einer durch die Primzahl p teilbaren Ordnung charakterisieren, und umgekehrt mittels der Primteiler p ein Kriterium für spezielle Gruppen herleiten, was z. T. Verallgemeinerungen früherer Ergebnisse des Verf. sind (dies. Zbl. 6, 100 u. 7, 150).

Yamada, Kaneo: Über die Gruppen mit Basen. II. Tôhoku Math. J. 45, 308-309

(1939).

In Fortführung von früheren Untersuchungen (dies. Zbl. 18, 391) gibt der Verf.

eine Reihe von Kriterien dafür an, wann eine Gruppe auflösbar ist, wenn sie Produkt von zyklischen (insbesondere von zwei zyklischen) Untergruppen ist. Magnus.

Golowin, O. N., und L. E. Syadowsky: Über die Automorphismengruppen der freien Produkte. Rec. math. Moscou, N. s. 4, 505—513 u. deutsch. Zusammenfassung 513—514

(1938) [Russisch].

Auf Grund der Ergebnisse von Kurosch (dies. Zbl. 6, 149) wird gezeigt, daß die Automorphismengruppe des freien Produktes G zweier unzerlegbarer und weder untereinander noch zur unendlichen zyklischen Gruppe noch zu 1 isomorpher Gruppen A, B erzeugt wird aus den Untergruppen Φ_A , Φ_B , Ψ_A , Ψ_B ; dabei ist Φ_A die Gruppe aller Automorphismen von G, die durch Ergänzung beliebiger Automorphismen von A entsteht, indem B elementweise festgehalten wird, Ψ_A ist die zu A isomorphe Gruppe aller Automorphismen von G, die durch Transformieren mit Elementen aus A bewirkt werden. Entsprechend wird Φ_B und Ψ_B definiert. — Wenn A und B isomorph sind, so tritt zu den angegebenen erzeugenden Automorphismen von G noch derjenige Automorphismus ω hinzu, der Vertauschung der bei einem Isomorphismus zwischen A und B korrespondierenden Elemente bewirkt. — Die auf der Hand liegenden Vertauschungsrelationen zwischen den erzeugenden Automorphismen liefern in jedem Falle ein vollständiges Relationensystem. — Die Automorphismengruppe des freien Produktes dreier weder untereinander noch zur unendlichen zyklischen Gruppe noch zu 1 isomorphen Gruppen A, B, C wird erzeugt von Φ_A , Φ_B , Φ_C und 6 weiteren Untergruppen $X_{BA}, \ldots X_{BC}$, wobei z. B. X_{BA} aus den Automorphismen besteht, die A mit einem festen Element aus B transformieren, dagegen B, C elementweise festlassen.— Falls einige der 3 Faktoren des freien Produktes einander isomorph sind, so kommen die analog zu ω gebildeten Automorphismen hinzu. — Der Beweis erfordert ein Reduktionsverfahren, das nur kurz umrissen wird. Zassenhaus (Hamburg).

Schröder, Kurt: Über k-parametrige Matrizengruppen. Deutsche Math. 4, 201—225

(1939).

Eine Gruppe von Matrizen heiße k-parametrig, wenn die Menge der Gruppenelemente in einer Umgebung $\mathfrak{U}(E)$, die sich mit E durch einen in \mathfrak{G} und in $\mathfrak{U}(E)$ verlaufenden Weg verbinden lassen, homöomorph einer k-dimensionalen Vollkugel ist. Zu jeder solchen Gruppe gehört eine Infinitesimalgruppe J, die mit zwei Matrizen U und \overline{V} auch $\alpha \overline{U}$ (α reell), $\overline{U} + \overline{V}$ und $\overline{UV} - \overline{VU}$ enthält und den reellen linearen Rang k hat. Die mit E durch einen Weg auf der Gruppe verbindbaren Gruppenelemente bilden eine Gruppe $\mathfrak{G}(E)$ und können als Produkte $\exp V_1 \ldots \exp V_i$ dargestellt werden, wobei V1,..., Vj zur Infinitesimalgruppe gehören. Eine frühere Behauptung des Verf. (dies. Zbl. 10, 155) wird dahin korrigiert, daß jedes Element von $\mathfrak{G}(E)$ sich als $B \exp U \exp V$ mit $B^2 = E$ darstellen läßt. Ist die Gruppe beschränkt, so ist jedes Element sogar als $\exp U$ darstellbar. Zu jeder Infinitesimalgruppe J vom Rang k gehört genau eine k-gliedrige zusammenhängende Matrizengruppe, bestehend aus allen Produkten $\exp V_1 \dots \exp V_j$. Durch ein Gegenbeispiel wird gezeigt, daß nicht jedes Element von $\mathfrak{G}(E)$ die Gestalt $B \exp U$ mit $B^2 = E$ und BU = UBhat, entgegen einer Behauptung von Cartan. Für die Komplexgruppe ist die Behauptung aber richtig. van der Waerden (Leipzig).

Ore, Oystein: Some studies on group theory. (Helsingfors, 23.—26. VIII. 1938.)

9. Congr. des Math. scand. 113-120 (1939).

Verf. gibt eine Übersicht über die Resultate und Probleme, die sich durch Anwendung der Verbandstheorie auf die Gruppentheorie ergeben haben. — Die Zerlegungssätze der Gruppentheorie lassen sich auf die entsprechenden Sätze in Dedekindschen Verbänden (deren Beziehung zu den Mengenverbänden und projektiven Geometrien kurz gestreift wird) zurückführen, und man kann so leicht zu Verallgemeinerungen gelangen. Andererseits läßt sich auch untersuchen, inwieweit die Gruppenaxiome notwendig sind für diese Sätze. Nennt man eine Menge, in der alle Gruppenaxiome bis auf das Assoziativgesetz gelten, eine Quasigruppe, so zeigt sich, daß einige Sätze

der Gruppentheorie schon in Quasigruppen gelten, die einem "abgeschwächten" Assoziativgesetz genügen. — Zum Schluß wird auf die Bedeutung des verbandstheoretischen Dualitätsprinzips für die Gruppentheorie hingewiesen. Lorenzen (Göttingen).

Kuntzmann, Jean: Classes dans un multigroupe. C. R. Acad. Sci., Paris 208,

959-960 (1939).

In a paper by Dresher and Ore on the theory of multigroups it was shown that a multigroup $\mathfrak M$ has a disjoint co-set expansion with respect to a sub-multigroup $\mathfrak A$ if $\mathfrak A$ possessed a property called reversibility. The author extends the co-set expansions to arbitrary sub-multigroups, but in this case the co-sets are no longer disjoint. However certain minimal co-sets containing no other co-set will be disjoint. The case were each co-set contains a single minimal co-set is important. The submultigroup is then said to be transitiv and a simple condition for transitivity is given.

Oystein Ore (New Haven, Conn.).

Dubreil, Paul, et Marie-Louise Dubreil-Jacotin: Théorie algébrique des relations

d'équivalence. J. Math. pures appl., IX. s. 18, 63-95 (1939).

Any decomposition of a set E into disjoint classes represents an equivalence relation R and one writes $a \equiv b \pmod{R}$ when a and b belong to the same class. Conversely any reflexive symmetric and transitive congruence relation defines an equivalence relation. One writes $R_1 \supset R_2$ if R_2 represents a refinement of the division R_1 . The equivalence relations form a structure by a suitable definition of union and crosscut. Two such relations are said to be semi-consecutive if the classes of the cross-cut $R_1 \cap R_2$ consist of classes which are either classes of R_1 or of R_2 . — The authors introduce the new and important concept of associable equivalence relations: R₁ and R_2 are associable if $a \equiv c(R_1)$ and $c \equiv b(R_2)$ implies the existence of an element d such that $a \equiv d(R_2)$, $d \equiv b(R_1)$. The Dedekind relation is satisfied for associable relations. Semi-consecutive relations are associable. In the equivalence relations defined by co-set expansions in groups associable relations correspond to permutable groups. Several of the following results may therefore be considered as generalisations of the reviewers results on permutable groups (Structures and group theory I., see this Zbl. 16, 351). The authors prove generalisations of the laws of isomorphism and an analogue to the theorem of Zassenhaus for equivalence relations. Oystein Ore.

Mengenlehre und reelle Funktionen.

Sierpiński, W.: Sur la puissance de la famille de tous les ensembes fermés d'un

espace métrique. Mathematica, Cluj 14, 196-200 (1938).

Es wird die Mächtigkeit der Familie der abgesculossenen Mengen eines metrischen Raums M (von transfiniter Mächtigkeit) gesucht und behauptet, daß die gesuchte Mächtigkeit 2^n ist, falls n die kleinste Kardinalzahl ist, zu der eine in M dichte Teilmenge D von M mit $\overline{D} = n$ gehört. Dieser Satz wird aus der Behauptung gefolgert, daß ein solcher Raum immer eine isolierte Teilmenge von der Mächtigkeit n besitzt. L. Egyed (Budapest).

Sierpiński, W.: Sur la décomposition des ensembles en sous-ensembles presque

disjoints. Mathematica, Cluj 14, 15-17 (1938).

Es wird ein direkter Beweis des Satzes gegeben: Jede unendliche Menge von der Mächtigkeit m ist Summe von mehr als m fast disjunkten Mengen von der Mächtigkeit m. (M_1 und M_2 sind fast disjunkt, falls $\overline{M_1 \cdot M_2} < \overline{M_1}, \overline{M_2}$.) (Vgl. auch Sierpiński, dies. Zbl. 15, 397—398.)

L. Egyed (Budapest).

Sudan, G.: Sur certaines fonctions transfinies. Bull. Math. Soc. Roum. Sci. 41, 117—120 (1939).

Verf. zeigt im Anschluß an seine früheren Untersuchungen (dies. Zbl. 2, 184 u. 4, 295), daß die transfinite Gleichung $\mu = f_i(\beta_i, \alpha_i, \nu)$, wo μ , β und ν Ordinalzahlen sind, in β und ν nur endlich viele Lösungen hat. $f_0 = \alpha_0 + \nu$, f_i wird durch transfinite Induktion definiert, wodurch auch die Relation $f_i(f_i(\beta_i, \alpha_i, \lambda), \alpha_i, \nu) = f(\beta_i, \alpha_i, \lambda + \nu)$

gefolgert werden kann. Aus dieser Relation folgt, daß die Anfangszahl der Lösungen $\{\nu\}$ eine additive Hauptzahl ist. L. Egyed (Budapest).

Maximoff, Isaiah: On approximately continuous functions. Bull. Amer. Math. Soc.

45, 264—268 (1939).

Sia $\varphi(x)$ una funzione assegnata nell'intervallo $\langle a, b \rangle$ ed ivi finita; detti $y_1, y_2,$ y_3, \ldots i numeri razionali compresi fra gli estremi di $\varphi(x)$ in $\langle a, b \rangle$ (e da questi diversi), si indichi con $E_{y_n}(E^{y_n})$ l'insieme in cui $\varphi(x) < y_n$ ($\varphi(x) > y_n$). Allora, secondo l'A., per la continuità aprossimativa di $\varphi(x)$ in $\langle a, b \rangle$ è necessario e sufficiente che esista un sistema di insiemi perfetti $P_{y_r}^n$, $P_{n}^{y_r}$ $(n=1,2,3,\ldots;r=1,2,\ldots,n)$ tali che $P^n_{y_r} \subset P^{n+1}_{y_r}, \, P^{y_r}_n \subset P^{y_r}_{n+1}, \, E_{y_r} = \lim_{n \to \infty} P^{y_r}_{y_r}, \, E^{y_r} = \lim_{n \to \infty} P^{y_r}_n; \, \text{e che ogni punto di } P^n_{y_r}(P^{y_s}_n) \, \text{sia}$ di densità per $P_{y_s}^n(P_n^y)$, se $y_r < y_s$, $n \ge r$, $n \ge s$. — Segue una condizione necessaria e sufficiente perchè l'equazione $g(x) = f(\varphi(x))$, con $\varphi(x)$ incognita, sia risolubile mediante una funzione della classe 1 verficante la proprietà di Darboux. G. Scorza Dragoni.

Vaidyanathaswamy, R.: On continuous functions of a real variable. Proc. Indian

Acad. Sci., Sect. A 9, 67-71 (1939).

The main theorems of this note are: 1. If f(x) is continuous in a closed interval, the subset $S[f(x) = \alpha]$ is of measure zero for every α between the lower and upper bounds of f(x), except possibly for an enumerable set of values. 2. If f(x) is continuous in an interval containing the point \bar{x} , if further 0 lies between upper and lower right derivate of f(x) at \bar{x} , then f(x) is necessarily oscillatory on the right of \bar{x} and \bar{x} is a limitpoint of the set $S[f(x) = \alpha]$ approached from the right, where $\alpha = f(\bar{x})$. The proofs are simple. J. Ridder (Groningen).

Tolstoff, G.: Une remarque sur le théorème de D. Th. Egoroff. C. R. Acad. Sci.

URSS, N. s. 22, 305—307 (1939).

Si f(x, y) est mesurable B sur V, si en outre pour tous les points d'un ensemble E borné et mesurable, situé sur l'axe Ox, on a $\lim_{x \to a} f(x, y) = f(x)$, alors il existe un sous-

ensemble F de E de mesure aussi proche que l'on vent de celle de E et tel que la convergence de f(x, y) vers f(x) est uniforme par rapport à x sur F. Le théorème devient faux si l'on exige seulement la mesurabilité (au sens de Lebesgue) de f(x, y) ou bien si l'on exige que f(x, y) soit mesurable par rapport à x pour y fixe et réciproquement. J. Ridder (Groningen).

Kaczmarz, S., et A. Turowicz: Sur l'irrationalité des intégrales indéfinies. Studia

Math., Lwów 8, 129-134 (1939).

 $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x), \ldots$ étant une suite infinie de fonctions réelles d'une variable réelle, finies et sommables dans un intervalle $\langle a, b \rangle$, $(-\infty \le a < b \le \infty)$, (Z) sera par définition l'ensemble des fonctions $g(x) = R[f_1(x), f_2(x), \dots, f_k(x)],$ où $R(y_1, y_2, \ldots, y_k)$ est une fonction rationelle arbitraire (à coefficients réels) de k variables, k étant un entier positif quelconque; certaines variables peuvent manquer dans l'expression de R. Dans chaque intervalle $\langle \alpha, \beta \rangle$ ($\alpha < \alpha < \beta < b$), il existe une fonction $g_0(x)$ appartenant à l'ensemble (Z), telle que: $1^{\circ}g_0(x)$ est finie et sommable

dans $\langle \alpha, \beta \rangle$, 2° la fonction $F(x) = \int_{\alpha}^{x} g_0(t) dt$ n'appartient pas à l'ensemble (Z). J. Ridder (Groningen).

Jessen, Børge: Abstrakte Maß- und Integraltheorie. (Helsingfors, 23.-26. VIII.

1938.) 9. Congr. des Math. scand. 121—134 (1939).

Übersicht über die Entwicklung der abstrakten Maß- und Integrationstheorie und deren wahrscheinlichkeitstheoretische Anwendungen. J. Ridder (Groninge.).

Froda, Alex.: Propriétés des intégrales définies, extérieure et intérieure. Bull. Math.

Soc. Roum. Sci. 41, 65-78 (1939).

L'auteur étudie les propriétés des intégrales extérieure et intérieure au sens de Lebesgue. Les théorèmes obtenus sont des généralisations de théorèmes connus pour l'intégrale de Lebesgue. Citons comme exemple le théorème: Lorsqu'une fonction f(P) sommable et non-négative sur E est la somme de deux fonctions bornées $\varphi(P)$ et $\psi(P)$, on a sur tout sous-ensemble mesurable et borné $\mathcal E$ de E, de mesure non nulle, pourvu que les fonctions soient à mesure extérieure finie (cf. Froda, Bull. Math. Soc. Roum. Sci. 39; ce Zbl. 19, 203),

 $\int_{\mathcal{E}}^{i} \varphi(P) dP + \int_{\mathcal{E}}^{i} \psi(P) dP \leq \int_{\mathcal{E}}^{i} f(P) dP \leq \int_{\mathcal{E}}^{e} \varphi(P) dP + \int_{\mathcal{E}}^{e} \psi(P) dP,$

∫ désignant l'intégrale intérieure, ∫ l'intégrale extérieure. J. Ridder (Groningen).

Marcinkiewicz, Joseph: Sur l'interpolation d'opérations. C. R. Acad. Sci., Paris

208, 1272—1273 (1939).

 L^{Φ} désignera la classe des fonctions f(x) $(0 \le x \le 1)$ pour lesquelles l'intégrale de $\Phi(|f|)$ est finie. U(x) = U(f, x) ($0 \le x \le 1$) sera une fonction réelle, définie pour toute fonction f(x) de L^{ϕ} . Alors U(x) vérifiera la condition L si l'on a $|U(f_1 + f_2, x)| \le K |U(f_1, x)| + K |U(f_2, x)|$, où la constante K est indépendante de x, f_1 , et f_2 . L'opération U est, par définition, de classe $[L^{\phi}, L^{\Psi}]$ si, pour toute fonction $f \in L^{\phi}$, $U(f) \in L^{\Psi}$. L'opération U vérifie, par définition, la condition C(a, b), si, pour toute $f \in L^a$ et pour tout nombre A positif, on a, pour $b < \infty$,

 $\operatorname{mes} E(|U(f, x)| > A) \leq \frac{K}{A^b} \left(\int_0^1 |f(x)| dx \right)^{\overline{a}}$ $|U(f, x)| \le K \max |f| \quad \text{pour} \quad a = b = \infty,$

et

où K est une constante absolue. L'auteur énonce e. a. le théorème: Si l'opération Uvérifie les conditions L, C(a, b) et C(c, d) où $a \leq b$, $c \leq d$, a < c, alors on a $U \in [L^p, L^q]$ dès que les nombres p et q vérifient les relations $a ; <math>\frac{q-b}{d-q} = \frac{bc}{ad} \frac{p-a}{c-p}$

J. Ridder (Groningen).

Tolstoff, G.: Sur la dérivée approximative exacte. Rec. math. Moscou, N. s. 4, 499—504 (1938).

Si la fonction finie et approximativement continue f(x) possède dans l'intervalle $\langle a,b \rangle$ partout une dérivée approximative $\varphi(x)$ (finie ou non), alors $\varphi(x)$ est une fonction de Baire au plus de première classe. On déduit de ce résultat, grâce à un théorème de Kintchine [Rec. math, Moscou 31, 401 (1922)] la proposition suivante: La fonction finie et approximativement continue f(x), ayant dans l'intervalle $\langle a, b \rangle$ partout une dérivée approximative (finie ou non), possède aussi une dérivée ordinaire aux points d'un système d'intervalles partout dense dans $\langle a, b \rangle$. G. Alexits.

Marcinkiewicz, Józef, und Antoni Zygmund: Sur la dérivée seconde généralisée.

Bull. Sémin. math. Univ. Wilno Nr 2, 35-40 (1939).

Siano a, b, c tre numeri reali tali che a < b < c (del resto arbitrari), A, B, C i tre numeri corrispondentemente determinati dal sistema di equazioni lineari: A + B+ C = 0, Aa + Bb + Cc = 0, $Aa^{2} + Bb^{2} + Cc^{2} = 2$. Se, in ogni punto di un insieme misurabile E dell'asse reale, avente misura >0, è $\limsup_{n \to \infty} |R| < \infty$, con R = Af(x + at) + Bf(x + bt) + Cf(x + ct), allora, in quasi tutto E, può porsi $f(x+t) = f(x) + \alpha(x)t + \frac{1}{2}\beta(x)t^2 + o(t^2)$, essendo $o(t^2)$ infinitesimo d'ordine sup. a t^2 . È eta(x) la derivata seconda generalizzata nel senso di de la Vallée Poussin. L'A. considera in particolare il caso in cui esiste finito il lim R: per a = -1, b = 0, c=1, tale limite è la derivata seconda generalizzata nel senso di Schwarz.

Analysis.

Allgemeines:

 Beatty, Samuel, and James T. Jenkins: Introduction to the calculus. Pt. 1. Toronto: Univ. of Toronto press 1938. 650 pag. a. 170 fig. bound 25/-. Inhalt: I. Function of a variable. II. Liveliness, or rate, or derivative of one function relative to another. III. Applications of derivation and antiderivation. IV. The technique of derivation and antiderivation. V. Taylor's theorems and applications.

VI. Indefinite integration. VII. Summation and definite integration.

Eine Reihe von Besonderheiten weckt die Bedenken des Referenten: Grundbegriffe erscheinen ohne Betonung; es wird mit ihnen operiert — erst viel später erfolgt eine etwas strengere Fassung. So wird erst $\frac{df(x)}{dg(x)}$, dann $\frac{df(x)}{dx}$ eingeführt, während erst S. 87 fast zufällig das Zeichen lim erscheint, und auch da noch ohne scharfe Begriffsfassung. S. 190 und 207 handhaben die Verff. unendliche Reihen (Binomialreihe, Reihen für trigonometrische und zyklometrische Funktionen), benutzen die Stetigkeit ihrer — noch gar nicht erklärten — Summe, differenzieren und "antiderivieren" sie, erklären aber erst 150 Seiten später die Elemente der Reihenlehre. — Neben diese Bedenken nach der theoretischen Seite treten andere nach der praktischen: S. 201f. sind numerische Beispiele für den Grenzübergang $\frac{\sin{(x+h)} - \sin{x}}{h}$

u. a. m. mit 15 Dezimalen angegeben; der Leser erfährt aber in dem ganzen Buch nicht, wie eine numerische Rechnung anzulegen sei, um verlangte Genauigkeit zu erhalten, oder gegebene voll auszunutzen. Graphische Darstellungen, wie $y=10^x$, ohne Angabe der auf beiden Achsen verschiedenen Einheiten sollten auch in Lehrbüchern nicht vorkommen (S. 33). Endlich sind wichtige Figuren unzulänglich "durch triviale Anwendung von Zirkel und Lineal" hergestellt: so die Sinuskurven durch Aneinanderfügen von Viertelkreisen, mit unstetiger Krümmung in den Nullstellen, wodurch ein sehr störendes Bild entsteht (S. 26); und Fig. 50, S. 61, lehrt, daß die Kurve $y=x^3-9\,x^2+24\,x-5$ unendlich viele Punkte mit einer Geraden gemein hat. — Solche Einwände lassen sich vermehren. — Wenn die Verff. in ihrem Vorwort beklagen, daß der Student meist nur die Technik des Calculus lerne, so muß der Ref. fürchten, daß bei solchen Mängeln eines Lehrbuches nicht einmal eine sichere Beherrschung der Technik vermittelt wird.

Varoli, Giuseppe: Sul teorema del valor medio. Period. Mat., IV. s. 19, 102-103

(1939).

Im Anschluß an eine Arbeit von Maci (dies. Zbl. 19, 299) erläutert Verf. die Ergebnisse von Sibirani [Mem. Accad. Bologna (8) 10 (1933); dies. Zbl. 10, 254] über die Frage, wann die Tangente einer Kurve einer Sehne in jeder Nähe des Berührungspunktes parallel ist.

Harald Geppert (Gießen).

Erdős, Paul: An extremum-problem concerning trigonometric polynomials. Acta

Litt, Sci. Szeged 9, 113-115 (1939).

Verf. beweist den folgenden Satz: Es sei S(x) ein trigonometrisches Polynom n^{ter} Ordnung derart, daß $|S(x)| \leq 1$ ist für alle reellen Werte von x. Dann haben unter den graphischen Darstellungen aller dieser Polynome diejenigen, deren Gleichungen $y = \cos(nx + \alpha)$ mit reellem α sind, die maximale Bogenlänge zwischen 0 und 2π . Auch wird ein von P. Csillag herrührender zweiter Beweis desselben Satzes gegeben. Bei diesen Beweisen wird das folgende Lemma von van der Corput und Schaake angewendet [Satz 3 in Compositio Math. 2, 321—361 (1936); dies. Zbl. 13, 108]: Sei S(x) ein trigonometrisches Polynom n^{ter} Ordnung derart, daß $|S(x)| \leq 1$ ist und $T(x) = \cos nx$. Wenn x_1 und x_2 zwei reelle Zahlen sind derart, daß $-1 < S(x_1) = T(x_2) < 1$ ist, so gilt $|S'(x_1)| \leq |T'(x_2)|$. Wenn das Gleichheitszeichen in einem einzigen Falle gilt, so gilt es stets, also ist dann $S(x) = T(x + \alpha)$. Verf. vermutet die Gültigkeit des folgenden Satzes: Wenn f(x) ein Polynom n^{ter} Ordnung ist derart, daß $|f(x)| \leq 1$ in (-1, 1), so hat unter den graphischen Darstellungen aller dieser Polynome diejenige des Tschebycheffschen Polynoms die maximale Bogenlänge zwischen —1 und +1.

Hua, Loo-keng: A remark on the moment problem. J. London Math. Soc. 14,

84-86 (1939).

Démonstration du théorème suivant: Soit (a, b) un intervalle fini ou infini et p(t) une fonction telle que $t^s p(t)$ soit sommable dans (a, b) pour $s = 0, 1, 2 \dots 2n$. Nous

désignons par $P_i(t) = \sum_{j=0}^{n} a_{ij}t^j$ (i = 0, 1, ..., n) des polynômes de degré n au plus tels que $\int p(t) P_i(t) P_j(t) dt = 0 \quad \text{pour } i \neq j, \quad \text{et} = 1 \quad \text{pour } i = j.$

Si c_0 , c_1 , ... c_n sont des constantes quelconques, le système d'équations $\int_{t}^{t} p(t)f(t)t^{r}dt = c_r$ (r=0,1,...n) admet la solution unique $f(t) = \sum_{i=0}^{n} e_i P_i(t)$ avec $e_i = \sum_{j=0}^{n} a_{ij}c_j$ (i=0,1,...n).

— Le cas particulær où p(t) = 1, a = 0, b = 1 a été considéré par C. Fox (voir ce Zbl. 18, 350).

B. Hostinský.

Levin, V.: Notes on inequalities. II. On a class of integral inequalities. Rec. math., Moscou, N. s. 4, 309—322 u. engl. Zusammenfassung 322—324 (1938) [Russisch].

Es handelt sich um Ungleichungen der Form (I) $\int_0^a f(x) \ y^k(x) \ dx \le \int_0^a y'^k(x) \ dx$ $(k > 1, a = 1 \text{ oder } \infty)$, wobei $y' \in L^k(0, a)$ und $f = -(k-1) \frac{\varphi'^{k-2} \varphi''}{\varphi^{k-1}}$, $\varphi' \in L^k(0, a)$. Verf. zeigt im Falle a = 1, daß (I) richtig ist und das Gleichheitszeichen nicht gestrichen werden darf, unter folgenden Voraussetzungen: Ist k ungerade, so sei y(0) = 0, (A) $0 \le y' \equiv 0$, $\varphi(0) = 0$, (B) $\varphi'(1) = 0$; ist k gerade, so sei überdies noch y(1) = 0, während anstatt (A) nur $y' \equiv 0$ sei. Ist k ungerade, so gilt Entsprechendes auch für $a = \infty$, wenn die für y und φ gestellten Bedingungen außer (B) in $(0, \infty)$ erfüllt sind. Gleichzeitig wird ein nicht wesentlich allgemeinerer Satz bewiesen. — Sei nun $\lambda' > 0$ der größte Wert von λ , für den die Differentialgleichung $-(k-1) \frac{\varphi'^{k-2} \varphi''}{\varphi^{k-1}} = \lambda f_1$ eine

Lösung besitzt, die den gestellten Bedingungen genügt. Dann ist $\int\limits_0^a f_1 y^k dx \le \frac{1}{\lambda'} \int\limits_0^a y'^k dx$.

Durch Spezialisierung von f_1 ergeben sich teilweise bekannte Ungleichungen (vgl. Hardy, Littlewood and Pólya, Inequalities, 172—175, Cambridge 1934; dies. Zbl. 10, 107). Schließlich wird der Zusammenhang mit dem Variationsproblem

$$J(y) = \int_{0}^{1} \{fy^{k} - y'^{k}\} dx = \text{max. erläutert.}$$
 V. G. Avakumović (Beograd).

Levin, V.: Notes on inequalities. III. Inequalities involving the geometric mean of a non-negative function. Rec. math., Moscou, N. s. 4, 325—330 u. engl. Zusammenfassung 330—331 (1938) [Russisch].

Für das verallgemeinerte geometrische Mittel $G\{f(x); p\} = \exp\left|\frac{1}{p(x)}\int_{0}^{x} \lg f(t) dp(t)\right|$

 $(0 bei <math>x \to \infty$, p' > 0, $g \ge 0$) werden zwei sich teilweise ergänzende Sätze bewiesen, die sich folgenderweise zusammenfassen lassen: Satz. Sei

$$\begin{split} \mathbf{F} &= -\frac{g}{p} \, \mathbf{\Psi} \Big\{ \! \Big(\frac{\mathbf{\Psi}}{p'} \! \Big) \! \Big\}^{-1} \exp \Big[-\frac{g}{p'} \Big\{ \! \Big(\frac{\mathbf{\Psi}}{p'} \! \Big) \! \Big\}^{-1} \Big\{ \! \Big(\frac{\mathbf{\Psi}}{p'} \! \Big)^{\!\!\!\!/} \frac{p}{g} \! \Big\} \! \Big], \quad F_f \in L(0, \infty), \quad p \lg g \to 0, \quad x \to 0 \\ \text{und entweder: (I)} \, \mathbf{\Psi} &= \frac{p'}{p}, \; p \lg p' \to 0, \; x \to 0 \; \text{oder: (II)} \; \mathbf{\Psi} > 0, \; \mathbf{\Psi}' \leqq 0, \int\limits_0^{\mathbf{\Psi}} \mathbf{\Psi} \, dx < \infty, \\ p \lg (-\mathbf{\Psi}') \to 0, \; x \to 0. \; \text{Dann ist im Falle (I) bzw. (II)} \int\limits_0^{\infty} g \, G \! \Big\{ f; \; p \big\} \, dx < \text{bzw.} \leqq \int\limits_0^{\infty} F_f \, dx. \end{split}$$

V. G. Avakumović (Beograd).

Levin, V.: Notes on inequalities. IV. On the Hilbert-Riesz inequality. Bull. Acad.
Sci. URSS, Sér. Math. Nr 5/6, 525—540 u. engl. Zusammenfassung 541—542 (1938)
[Russisch].

Sei p > 1, q > 1, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} > 1$, $\lambda = 2 - \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$ $(0 < \lambda < 1)$, f(x) > 0, g(x) > 0, $0 < \int_{-\infty}^{+\infty} f^p dx = F^p < \infty$, $0 < \int_{-\infty}^{gq} g^q dx = G^q < \infty$. Verf. ergänzt die Hardy-Littlewood-

sche Ungleichung $J = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} fg \, |x+y|^{-\lambda} dx dy \le K(p,q) \, FG$ für diejenigen f und g, deren "rearrangements" f* und g* den Beding. $\alpha^p = \sup |x| \, f^{*p} (-\infty < x < \infty)$, $\beta^q = \sup |y| g^{*q} (-\infty < y < \infty)$ genügen, indem gezeigt wird, daß

$$J < L(p,q) \alpha^{\varrho} \beta^{\sigma} F^{1-\varrho} G^{1-\sigma} \Big(\varrho = \frac{q'-p}{p'+q'}, 0 < \varrho < 1, \sigma = \frac{p'-q}{p'+q'}, 0 < \sigma < 1 \Big),$$

wo $L(p, q) = \frac{4}{\pi} \sin \lambda \frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi}{2 p} \sin \frac{\pi}{2 q} \Gamma(1 - \lambda) \Gamma(\frac{1}{p'}) \Gamma(\frac{1}{q'})$ die bestmögliche Konstante

ist. — Ferner wird bewiesen: Sei
$$\lg' t = \max(1, \lg t) (t > 0), r + s = \mu \ge 0,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left[f^* \left\{ \lg' \frac{1}{|x|} \right\}^r \right]^p dx = A_r^p < \infty, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \left[g^* \left\{ \lg' \frac{1}{|y|} \right\}^s \right]^q dy = B_s^q < \infty.$$

Dann ist $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \lg' \frac{1}{|x+y|} \right\}^u |x+y|^{-\lambda} f g \, dx \, dy < K(p,q,r,s) \, A_r B_s$. Die Beweise beruhen auf der F. Rieszschen Ungleichung $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f g h(x+y) \, dx \, dy \le \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f^* g^* h^*(x+y) \, dx \, dy$ [J. London Math. Soc. 5, 162—168 (1930)].

Nagumo, Mitio: Über die Ungleichung $\frac{\partial u}{\partial u} > f(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x})$. Jap. J. Math. 15,

Voraussetzung: \mathfrak{B} ist der Bereich $0 \leq y < l$, $\alpha(y) \leq x \leq \beta(y)$ $(\alpha < \beta)$, $\alpha(y)$ und $\beta(y)$ sind stetig differenzierbar, f(x, y, u, p) ist für x, y in \mathfrak{B} und beliebige u, pdefiniert. Ferner ist für zwei in $\mathfrak B$ stetig differenzierbare Funktionen u(x, y), v(x, y)

$$u_y > f(x, y, u, u_x), \quad v_y \le f(x, y, v, v_x), \quad u(x, 0) > v(x, 0)$$

und auf $x = \alpha(y)$ für $p \leq u_x$

$$f(x, y, u, p) - f(x, y, u, u_x) \leq \alpha'(y) (u_x - p)$$

und auf $x = \beta(y)$ für $p \ge u_x$

$$f(x, y, u, u_x) - f(x, y, u, p) \le \beta'(y) (p - u_x).$$

Behauptung: u(x, y) > v(x, y) in \mathfrak{B} . Ein entsprechender Satz gilt für Funktionen von mehr als zwei unabhängigen Variabeln. Kamke (Tübingen).

Approximation von Funktionen, Orthogonalentwicklungen:

Hall, T.: Sur l'approximation polynômiale des fonctions continues d'une variable réelle. (Helsingtors, 23.-26. VIII. 1938.) 9. Congr. des Math. scand. 367-369 (1939).

Le problème d'approximation indéfinie, par polynomes, d'une fonction continue f dans l'intervalle $(-\infty, +\infty)$ se pose de la manière suivante: A tout $\varepsilon > 0$ correspond un polynome P tel que $\max_{(-\infty, +\infty)} \frac{|f-P|}{K} < \varepsilon$, K = K(x) étant une certaine fonction de comparaisons, positive dans $(-\infty, +\infty)$ et telle que $\max_{(-\infty, +\infty)} |x|^n/K(x) < \infty$, n = 0, 1, ...L'aut. énonce, sans démonstration, la propriété suivante: Pour que le problème précédent soit possible pour toute function f telle que $f(x)/K(x) \to 0$ pour $|x| \to \infty$, il faut et il suffit que l'intégrale

 $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\log K^*(x)}{1+x^2} \, dx$

soit divergente. $\log K^*(x)$ est la plus grande minorante paire de $\log K(x)$ qui est convexe en $\log x$ dans $(0, +\infty)$. T. Popoviciu (Cernăuți).

Hardy, G. H.: Notes on special systems of orthogonal functions. I. The boundedness of the generalized Laguerre system. J. London Math. Soc. 14, 34-36 (1939).

Let $\{f_n^{(\alpha)}(x)\}\$ denote the orthogonal functions corresponding to generalized Laguerre polynomials $L_n^{(\alpha)}(x)$, $f_n^{(\alpha)}(x) = \sqrt{\frac{n!}{(n+\alpha)!}} e^{-\frac{1}{2}x} x^{\frac{1}{2}\alpha} L_n^{(\alpha)}(x)$. It was proved by Szegő [Math. Z. 1, 340 (1918)] that $|f_n^{(0)}(x)| \leq 1$ for all n and x. The author proves that $|f_n^{(\alpha)}(x)| \leq A(\alpha_0)$ for $0 \leq \alpha \leq \alpha_0$, $x \geq 0$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ where α_0 is any positive number. The theorem is false for $\alpha < 0$. S. Kaczmarz (Lwów).

Hardy, G. H.: Notes on special systems of orthogonal functions. II. On functions orthogonal with respect to their own zeros. J. London Math. Soc. 14, 37-44 (1939).

The function f(t) is said to be orthogonal with respect to its zeros in the interval (0, 1), if $\int_{0}^{\infty} f(\lambda_{n}t) f(\lambda_{m}t) dt = 0$, $m \neq n$, where λ_{i} are zeros of f(t). The functions $\sin t$, $t^{\frac{1}{2}}J_{\nu}(t)$, $[J_{\nu}(t)]$ Bessel's functions] are orthogonal in (0,1) with respect to their zeros. The paper proves, that, within certain limits, there are no other functions with the same property: If $f(z) = z^{\varrho} \cdot F(z)$, $\varrho > -\frac{1}{2}$, and F(z) an integral function with real zeros of order less then 1 or of order 1 and minimal type, $F(0) \neq 0$ and f(z) orthogonal with respect to its zeros, then $f(z) = A \cdot J_{2\varrho}(cz^{\frac{1}{2}})$. A similar theorem with less retricted result is true for real zeros symmetrically situated about the origin.

S. Kaczmarz (Lwów).

Ser, Joseph: Pour la géométrie d'un contour. Bull. Sci. math., II. s. 63, 139—147 (1939).

Dans un plan x O y, soit C une courbe fermée simple, sans point double. En posant z = x + iy et $\bar{z} = x - iy$, l'auteur introduit les polynomes $P_n(z)$ de degré n, tels qu'on ait, en intégrant le long de C, $\int P_n(z) \bar{z}^{h-1} \vec{c} \bar{z} = 0$ (h = 1, ..., n-1), et $P_n(0) = 0$. Pour achever de déterminer ces polynomes, l'auteur adopte comme coefficient de z^n une certaine valeur réelle, qui ne dépend que de C et non du choix des axes rectangulaires Ox et Oy; alors tous les autres coefficients sont réels. D'autre part les zéros de la dérivée de P_n sont, eux aussi, invariants. Georges Giraud.

Popesco, Al. Th.: Note sur l'article de M.Al. Gutzu "Une comparaison des différentes méthodes de quadrature par approximation". Bull. Math. Phys. École polytechn. Buca-

rest 9, 85-88 (1938).

L'A. fa uno studio critico del lavoro (citato nel titolo), di Al. Gutzu (vedi in questo Zbl. 13, 12—18) e trova che tutte le formule di quadratura date dal Gutzu risultano già note ed esaurientemente studiate dal molto tempo.

Luigi Beretta.

Reihen:

Cattaneo, Paolo: Sui numeri di Stirling. Atti Mem. Accad. Sci. Padova, N. s. 54, 223—229 (1938).

Verf. betrachtet den Ausdruck n! $b^n: \prod_{\nu=1}^n (a+\nu b)$ und setzt seine Entwicklung nach Potenzen von a/b, die offenbar für 0 < a < b konvergiert, in der Form $\sum_{h} (-1)^h C_{n/h} \left(\frac{a}{b}\right)^h$ an. Die Koeffizienten $C_{n/h}$ bezeichnet er als Stirlingsche Zahlen

dritter Gattung; sie genügen der Rekursionsgleichung $nC_{n/h} = nC_{n-1/h} + C_{n/h-1}$, worin für jedes t $C_{1/t} = C_{t/0} = 1$ zu setzen ist. Aus ihr erschließt Verf. einige Eigenschaften der genannten Zahlen und findet insbesondere, daß $C_{n/h}$ mit wachsendem h monoton wächst und den Grenzwert n besitzt.

M. Cipolla (Palermo).

Lehmer, D. H.: Note on an absolute constant of Khintchine. Amer. Math. Monthly 46, 148—152 (1939).

Sind q_1, q_2, \ldots die Teilnenner des regelmäßigen Kettenbruches α , so gilt nach Untersuchungen von Lévy und Khintchine für fast alle α :

$$\sqrt[n]{q_1 q_2 \dots q_n} \to \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{k(k+2)}\right)^{\frac{\log k}{\log 2}} = K, \quad \text{für} \quad n \to \infty$$

(dies. Zbl. 10, 341; 14, 254, 268). Verf. wendet auf die aus dieser Formel folgenden Reihe für log 2 log K die Eulersche Summenformel an; eine geschickte Abschätzung des auftretenden Integrals liefert dann ein Verfahren zur approximativen Berechnung von $K=2,685550\ldots$ Es wird weiter gezeigt, daß die Teilnenner q_1,q_2,\ldots der Zahl π der Beziehung

$$\sqrt[n]{q_1 \, q_2 \dots q_n} = 2,6831468 \dots \text{ für } n = 100$$

genügen, so daß man vermuten könnte, daß π zu den "fast allen α " gehöre. Verf. weist darauf hin, daß Ähnliches für die Zahl e nicht zutrifft. J.F. Koksma.

Toscano, Letterio: Relazione tra alcune serie di potenze e trigonometriche. Boll. Un. Mat. Ital., II. s. 1, 141—144 (1939) n

Die Beziehungen $x^n + y^n = 2(xy)^{\frac{n}{2}} \cos n\omega$, $x^n - y^n = 2i(xy)^{\frac{n}{2}} \sin \omega$, die für

die Wurzeln der Gleichung $z^2-2q^{1/2}z\cos\omega+q=0$ gelten, gestatten den Übergang von Potenzreihen zu Fourierreihen und umgekehrt; neben bekannten Relationen werden auch die Formeln

weither such the Former
$$\cos(x-y)=\sum_{0}^{\infty} \frac{(-1)^{\alpha}}{(2\alpha)!}(x^{2\alpha}+y^{2\alpha})\Omega_{2\alpha},$$
 $\sin(x-y)=\sum_{0}^{\infty} \frac{(-1)^{\alpha}}{(2\alpha+1)!}(x^{2\alpha+1}-y^{2\alpha+1})\Omega_{2\alpha+1},\quad J_n(2i)\, \sqrt[4]{xy}=\frac{i^n(xy)^{\frac{n}{2}}}{n!}\Omega_n$ angeführt.

Bosanquet, L. S.: Note on differentiated Fourier series. Quart. J. Math., Oxford Ser. 10, 67-74 (1939).

The note contains a necessary and sufficient condition for the differentiated Fourier series of f(t), L-integrable, to be summable $(C, \alpha + 1)$ for t = x to sum s. The condition is: The function $\{f(x+t) - f(x-t)\}/4 \sin \frac{t}{2}$ should be integrable in Cesàro-Lebesgue sense in $(0, \pi)$, its Fourier series should be summable (C, α) to s at t = 0.

S. Kaczmarz (Lwów).

Izumi, Shin-ichi, and Tatsuo Kawata: Notes on Fourier series. VI. A theorem on the absolute convergence. Tôhoku Math. J. 45, 157—161 (1938).

Let $f(x) \sim \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$; the authors give sufficient conditions on f(x) for the convergence of $\sum_{k=0}^{\infty} |c_n|^k$ (k>0). The reviewer fails to see, how their results include the wellknown ones, to which they refer.

Otto Szász (Cincinnati, Ohio).

Izumi, Shin-ichi, and Tatsuo Kawata: Notes on Fourier series. V. Absolute Riesz'summability. Tôhoku Math. J. 45, 134—144 (1938).

The main object of this paper is to give sufficient conditions for absolute summability of Fourier series by logarithmic means. Such a condition is $f(x+t) + f(x-t) - 2f(x) = O\left(\left(\log \frac{1}{t}\right)^{-\epsilon}\right)$, $\epsilon > 0$. For the proof a recent result of Hardy and Littlewood is used. (III. see this Zbl. 19, 207.)

Otto Szász (Cincinnati, Ohio).

Izumi, Shin-ichi, and Tatsuo Kawata: Notes on Fourier series. VII. A remark on absolutely summable factors. Tôhoku Math. J. 45, 194—196 (1938).

Using a recent result of Zygmund (this Zbl. 19, 16) the authors prove the following theorem: Suppose (1) $\lambda_n = O(1)$, (2) $\sum n(\Delta \lambda_n)^2 < \infty$, (3) $\sum n^{-1}\lambda_n^2 < \infty$; let $f(z) = \sum_{0}^{\infty} c_n z^n \in H$, i.e. $\int_{0}^{2\pi} |f(re^{ix})| dx = O(1)$ as $r \uparrow 1$. Then the series $\sum_{0}^{\infty} \lambda_n c_n z^n$ is absolutely summable (A) for almost all x, i.e. $\int_{0}^{\varrho} |\sum n \lambda_n c_n e^{inx} r^{n-1}| dr = O(1)$ as $\varrho \uparrow 1$, for almost all x. Remark of the reviewer: The assumption (1) can be removed. Szász.

Karamata, J.: Sur la sommabilité forte et la sommabilité absolue. Mathematica, Clui 15, 119-124 (1939).

Verf. untersucht das Verhältnis zwischen den C-, starken C- und absoluten C-Verfahren, die durch

$$(C) S_n = \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^n s_{\nu} \to 0, \{C\} \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^n |s_{\nu} - s| \to 0 \text{ bei } n \to \infty \text{ und } |C| \sum_{\nu=1}^{\infty} |S_{\nu} - S_{\nu-1}|$$

konverg. definiert sind und zeigt insbesondere: aus (C) und (I) $\sum_{\nu=1}^{n} \nu \left| s_{\nu} - s_{\nu-1} \right| = O(n)$ folgt $\{C\}$, während das Umgekehrte aber sogar für beschränkte s_{ν} nicht richtig zu sein braucht und aus (C) auf |C| auch dann nicht gefolgert werden kann, wenn in (I) O durch o ersetzt wird. V.G. Avakumović (Beograd).

Hayashi, Gorō: A theorem on limit. Tôhoku Math. J. 45, 329-331 (1939).

A toute suite $\{x_n\}$ on peut rattacher une suite $\{y_n\}$ définie par rapport à la suite

donnée
$$\{\alpha_n\}$$
, $\alpha_n > 0$, et au nombre fixe q donnée ainsi:
$$y_n = x_n + q \cdot \frac{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n}{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n}.$$
 Soit
$$\prod_{m=1}^n \left(1 + q \cdot \frac{\alpha_m}{A_m}\right) = p_n$$

où $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \cdots + \alpha_n = A_n$. L'auteur prouve le resultat suivant: La convergence de $\sum |y_n - y_{n-1}|$ entraîne celle de $\sum |x_n - x_{n-1}|$ si l'on a $\lim_{n = \infty} p_n = \infty$. E. Kogbetliantz (Paris).

Dirichletsche Reihen, fastperiodische Funktionen:

Petersson, Hans: Konstruktion der sämtlichen Lösungen einer Riemannschen Funktionalgleichung durch Dirichletreihen mit Eulerscher Produktentwicklung. I. Math. Ann. 116, 401—412 (1939).

Hecke hat gezeigt, daß zu dem vollen System $\varphi_1(\tau), \ldots, \varphi_s(\tau)$ der Modulformen gerader Dimension -r konstante Matrizen B_{ν} gehören, so daß die der Matrix $\sum \varphi_{\nu}(au) \; B_{
u} = B(au)$ zugeordnete Matrix von Dirichletreihen ein Eulerprodukt hat.

Die B, transformieren sich bei den Heckeschen Operatoren nach einer Darstellung $T_n \to \Lambda(n)$ dieser Operatoren; die B_ν spannen den von den $\Lambda(n)$ erzeugten Ring auf. Werden die B, simultan auf Dreiecksgestalt transformiert, so sind die Diagonalelemente von $B(\tau)$ Eigenfunktionen der T_n und die zugeordneten Dirichletreihen sind einzelne Dirichletreihen mit Eulerprodukten, und zwar alle. Verf. zeigt nun, daß die Darstellung $T_n \to \Lambda(n)$ vollreduzibel ist, daß also $B(\tau)$ als Diagonalmatrix angenommen werden kann. Der linearen Unabhängigkeit der $\varphi_{\nu}(\tau)$ wegen sind die Elemente dieser Diagonalmatrix $B(\tau)$ verschieden. Es gibt daher bis auf die Reihenfolge eindeutig bestimmte z Modulformen, deren zugeordnete Dirichletreihen Eulerentwicklungen haben. Anstatt die Dirichletreihen D(s) aus Modulformen zu gewinnen, kann man auch fordern, daß sie der Riemannschen Funktionalgleichung $(2\pi)^{-s}\Gamma(s)D(s)$ $=(2\pi)^{-(1-s)}\Gamma(1-s)D(1-s)$ genügen und daß die (s-r)D(s) ganze Funktionen endlichen Geschlechtes sind. Der Beweis beruht auf der Einführung einer Hermiteschen Metrik in der Schar der Spitzenformen der Dimension -r (die Eisensteinreihe spaltet sich von selbst aus der vollen Schar ab und braucht nicht weiter berücksichtigt zu werden). Als Skalarprodukt zweier Spitzenformen t, φ für eine Untergruppe Γ_0 der vollen Modulgruppe von endlichem Index wird

$$(f, \varphi)_{\Gamma_0} = \iint\limits_{\mathbb{R}_0} f(\tau) \, \overline{\varphi(\tau)} \, y^{r-2} \, dx \, dy$$

definiert, es ist $\tau=x+iy$, und \mathfrak{R}_0 ist ein Fundamentalbereich von Γ_0 . Dieses Skalarprodukt hat die üblichen Eigenschaften, und darüber hinaus gilt $(f,\varphi)_{\Gamma_0}$ $=\frac{1}{g}(f,\varphi)_{\Gamma_1}$ für eine Untergruppe Γ_1 vom endlichen Index g in Γ_0 . Jetzt wird die Formel

$$(f(\tau)|T_n, \varphi(\tau))_{I^r} = \frac{1}{g(n)} \iint_{\mathbb{R}_n} f(\tau) \left\{ n^{\frac{r-1}{2}} \sum_{S \in \mathfrak{R}} \varphi(\tau) |S^{-1}| \right\} y^{r-2} dx dy$$

bewiesen, wo Γ die volle Modulgruppe ist, g(n) den Index und \Re_n einen Fundamentalbereich der Hauptkongruenzuntergruppe n-tér Stufe bezeichnet und B ein Vertretersystem der Linksklassen der Matrizen n-ter Ordnung nach der vollen Modulgruppe bedeutet. Hieraus schließt man $(f(\tau) \mid T_n, \varphi(\tau)) = (f(\tau), \varphi(\tau) \mid T_n)$ (zunächst nur für primes n, wo & gleichzeitig als Vertretersystem der Rechtsklassen genommen werden kann, und dann sofort allgemein). Für eine normierte Orthogonalbasis der Schar der Spitzenformen sind zufolge dieser Relation die darstellenden Matrizen $\Lambda(n)$ hermitesch, und daraus folgt nach bekannten Schlüssen die volle Reduzibilität der Darstellung $T_n \to \Lambda(n)$. Deuring (Jena).

Buch, Kai Rander: On the zeropoint distribution of an analytic limit periodic function. (Helsingfors, 23.—26. VIII. 1938.) 9. Congr. des Math. scand. 285—291 (1939).

Referat über die Arbeit des Verf. in den Math.-fys. Medd., Danske Vid. Sels. 16, H. 4, 1—26 (1938); dies. Zbl. 19, 60. Maak (Heidelberg).

Bohr, Harald: Über fastperiodische Bewegungen. (Helsingfors, 23.—26. VIII.

1938.) 9. Congr. des Math. scand. 39-61 (1939).

Verf. berichtet über eine Reihe von Ergebnissen über fastperiodische Bewegungen z(t), z komplex, die durch die klassische Frage nach der Existenz der mittleren Winkelbewegung für ein Exponentialpolynom $z = re^{i\varphi} = \sum A e^{i\lambda t}$ angeregt wurden. Ref. begnügt sich mit einer kurzen Inhaltsangabe, da die Originalarbeiten mit diesen Ergebnissen zum größten Teil schon besprochen sind. Verf. unterscheidet zwischen den beiden Fällen u. Gr. |z| positiv und u. Gr. |z| gleich Null. Im ersten Fall ist, wie Verf. bewies, stets $\varphi(t) = ct + \psi(t)$, ψ fastperiodisch. Verf. stellt die Frage in den Vordergrund, welche Werte die mittlere Bewegung annehmen kann, wenn z(t) gewissen Bedingungen unterworfen wird (z. B. wenn die Fourierexponenten einer gegebenen Zahlenmenge angehören). In diesen Zusammenhang reiht Verf. auch den Satz von Fenchel und Jessen [Danske Vid. Selsk., Math.-fys. Medd. 13, Nr 6, 1-28 (1935), dies. Zbl. 11, 346] ein, nach welchem jede fastperiodische Bewegung auf einer geschlossenen Fläche vom Geschlecht p>1 gleichmäßig stetig in eine reinperiodische deformiert werden kann. Was den zweiten Fall betrifft, so berichtet Verf. über die allgemeinen Jessenschen Sätze [Math. Ann. 108, 485-516 (1933); C. R. Acad. Sci., Paris 207, 1081-1084 (1938), dies. Zbl. 7, 156 u. 20, 211] über die Existenz der mittleren Bewegung bei analytischen fastperiodischen Funktionen. Die kürzlich erschienene Weylsche Note [Amer. J. Math. 60, 889—896 (1938), dies. Zbl. 19, 334], in welcher der klassische Bohlsche Ansatz mit Hilfe des Gleichverteilungssatzes konsequent durchgeführt wird, kommt nur in einer Schlußbemerkung zu Worte. E. Hopf (Leipzig).

Spezielle Funktionen:

Krafft, M.: Herleitung der trigonometrischen Funktionen aus ihrer Funktionalgleichung. Deutsche Math. 4, 194-201 (1939).

Die Funktionen $C(x) = \cos x$, $S(x) = \sin x$ erfüllen die Funktionalgleichungen $C(x - \xi) = C(x)C(\xi) + S(x)S(\xi), \quad S(x - \xi) = S(x)C(\xi) - C(x)S(\xi).$ Wie Perron gezeigt hat [Arch. Math. Phys. (3) 28, 97-100 (1920)], sind die Funktionen cos x, sin x durch die Funktionalgleichungen (1) auch eindeutig bestimmt, wenn man noch die Forderung (2) $\lim_{x\to 0} \frac{S(x)}{x} = 1$ stellt. Verf. nimmt statt (2) die zusätzliche Forderung C(x) > 0 in einer Umgebung von x = 0. Dann erhält man (von einer trivialen Lösung abgesehen) entsprechend den verschiedenen Arten der Winkelmessung eine einparametrige Schar von Lösungen der Funktionalgleichungen (1).

MacRobert, T. M.: On Dixon's formula for well-poised series. Philos. Mag., VII. s.

27, 579—581 (1939).

Verf. leitet eine (mit Rücksicht auf ihre Länge hier nicht wiedergegebene) Darstellung für die verallgemeinerte hypergeometrische Funktion ${}_3F_2\left(\begin{matrix} \alpha,\beta,\gamma;z\\ \alpha-\beta+1,\alpha-\gamma+1\end{matrix}\right)$ her, die die Dixonsche Formel

$${}_{3}F_{2}\left(\underset{\alpha-\beta+1,\ \alpha-\gamma+1}{\overset{\alpha,\ \beta,\ \gamma;\ 1}{-}}\right) = \frac{\Gamma\left(1+\frac{\alpha}{2}\right)\Gamma(1+\alpha-\beta)\ \Gamma\left(1+\alpha-\gamma\right)\ \Gamma\left(1+\frac{\alpha}{2}-\beta-\gamma\right)}{\Gamma(1+\alpha)\ \Gamma\left(1+\frac{\alpha}{2}-\beta\right)\Gamma\left(1+\frac{\alpha}{2}-\gamma\right)\Gamma(1+\alpha-\beta-\gamma)}$$

als Sonderfall (z = 1) enthält.

Giaccardi, Fernando: Di un procedimento elementare per lo sviluppo di una funzione in serie di Bessel. Boll. Un. Mat. Ital., II. s. 1, 108—113 (1939). Ausgehend von der Erzeugenden der Besselschen Funktionen $e^{\frac{1}{2}v(t-t^{-1})} = \sum_{k=0}^{+\infty} J_k(v)t^k$

gewinnt der Verf. eine Entwicklung der Potenz $\frac{x^n}{n!}$ nach Besselschen Funktionen und

beweist damit in einfacher Weise den bekannten Satz über die Entwicklung einer

willkürlichen Funktion $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(0) \frac{x^n}{n!}$ in eine Neumannsche Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n J_n(x)$.

Als Anwendung wird die von Neumann zum Ausgangspunkt seiner darauf bezüglichen Untersuchungen genommene Entwicklung des Cauchyschen Kernes $\frac{1}{t-z}$ hergeleitet.

Schoblik (Brünn).

Meijer, C. S.: Integraldarstellungen für Struvesche und Besselsche Funktionen.

Compositio Math. 6, 348-367 (1939).

Functions $G_n(\beta; a_1, a_2, a_3; \varrho)$, $S_n(b_1, b_2, b_3, b_4; \zeta)$ are defined as products of n factors each of which contains a power of the last variable, a number of gamma functions and a hypergeometric function with argument $(-)^n e^s$. The hypergeometric function for S_n is of type ${}_0F_3$, that for G_n is of the type ${}_1F_2$. — The integrals which are evaluated involve an S function with argument $\frac{1}{2}\varrho v$ (or $\frac{1}{4}zv$) and a Bessel function with argument v. Special cases of the formulae are (for s=0,1)

$$\pi H_{\nu}(z^{2}) - \pi Y_{\nu}(z^{2}) = 8 \cos \nu \pi \int_{0}^{\infty} J_{-\nu-s}(u^{2}) K_{2\nu+s}(2zu) (u/z)^{s} u \, du, \quad R(\nu) < \frac{1}{2} - s$$

$$\pi I_{\nu}(z^{2}) - \pi L_{\nu}(z^{2}) = 4 \int_{0}^{\infty} K_{\nu+s}(u^{2}) J_{2\nu+s}(2zu) (u/z)^{s} u \, du, \quad R(\nu) > -\frac{1}{2} - s$$

$$J_{\nu}(z^{2}) = 2 \int_{0}^{\infty} J_{\nu+s}(u^{2}) J_{2\nu+s}(2zu) (u/z)^{s} u \, du. \quad R(\nu) > -s - \frac{1}{2}$$

$$H. Bateman \text{ (Pasadena)}.$$

Rosen, J.: Some generalizations of Bessel functions. Tôhoku Math. J. 45, 229—238 (1939).

Ausgehend von der auf Bourget [J. de Math. 6, 33—34 (1861)] zurückgehenden Verallgemeinerungen der Besselschen Funktionen

$$I_{n,k}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{0}^{(0+t)} t^{n-1} (t+t^{-1})^k \exp\left[\frac{z}{2} (t-t^{-1})\right] dt$$

wird gezeigt, wie sich weitere ähnliche Integraldarstellungen von partikulären Lösungen der linearen gewöhnlichen Differentialgleichung 4. Ordnung, der $I_{n,k}(z)$ genügt, bei beliebigen reellen n und k finden lassen. Die asymptotischen Entwicklungen dieser Lösungen ermöglichen den Beweis ihrer linearen Unabhängigkeit. F. Knoll (Wien).

Erdélyi, A.: Transformation einer gewissen nach Produkten konfluenter hypergeometrischer Funktionen fortschreitenden Reihe. Compositio Math. 6, 336—347 (1939).

The applications and generalisations of the well known series

$$\sum c_n z^n L_n^{(\alpha)}(x) L_n^{(\alpha)}(y), \qquad c_n \Gamma(\alpha + n + 1) = n!$$

are first discussed and it is suggested that the sum of this series may have been known to W. Myller Lebedeff. [It is true that in her Dissertation (Göttingen 1906) it was shown that the generalised polynomials of Laguerre are solutions of a homogeneous integral equation of the second kind but the expansion of the kernel was not given explicitly and was not immediately derivables from the expansion theorems mantioned.] — The series is next expressed in terms of the confluent hypergeometric function and is generalised into $K(z) = \sum_r (h)_r \Phi(a-r,c,x) \Phi(b-r,d,y) z^r/r!$ With

the aid of Perron's asymptotic formula for $\Phi(a-r,c,x)$ it is shown that the power series K(z) converges within the circle |z| < 1 for arbitrary real or complex values of the parameters a, b, c, d, h, x, y $(c, d \neq 0, -1, -2, \ldots)$. — The series is transformed, by substituting integral representations of the Kummer functions, into a series of product of Humbert functions. The transformation is obtained in another way by an extension of a method used by G. N. Watson.

H. Bateman (Pasadena).

Erdélyi, A.: Infinite integrals involving Whittaker functions. J. Indian Math. Soc., N. s. 3, 169—181 (1939).

Let
$$c + l + \frac{1}{2} = a$$
, $m + \frac{1}{2} = s$, $c + 1 = d$, $\frac{1}{2} - l = b$ then when $|\arg p| < \frac{1}{2}\pi$, $|\arg q| < \frac{3}{2}\pi$, $|p| < |q|$, $R(c \pm n) > -1$, $R(c - m - k + l) < 0$, $2m = -1$, -2 ,
$$\int_{0}^{\infty} x^{c - m - 1} e^{-\frac{1}{2}(p - q)x} M_{k, m}(px) W_{l, n}(qx) dx$$

$$= \Gamma(a) p^{s - a} q^{l} \left[\frac{B(d + n, -a)}{B(a, b - n)} z^{a} F(d + n, d - n, k + s; 1 + a, 2s; z) + \frac{B(a, k + s)}{B(a, 2s - a)} F(b + n, b - n, k + s - a; b - c, 2s - a; z) \right]$$

where z = p/q. When $c = 2 m \pm n$ the two hypergeometric series of type $_3F_2$ reduce to ordinary hypergeometric series. — The author considers the case in which at least one of the two Whittaker functions under the integral sign reduces to a modified Bessel function or to a combination of Weber's parabolic cylinder function. Integrals involving the generalised polynomials of Laguerre are also considered.

H. Bateman (Pasadena).

Petersson, Hans: Über eine Metrisierung der ganzen Modulformen. Jber. Deutsch. Math.-Vereinig. 49, Abt. 1, 49—75 (1939).

Durch das über einen Fundamentalbereich der Modulgruppe erstreckte Integral $\iint f(\tau) \, \overline{g(\tau)} \, y^{r-2} \, dx \, dy = (f,g)$ erklärt Verf. ein gegen Modulsubstitutionen invariantes "inneres Produkt" der beiden ganzen Modulformen f,g, wovon eine eine Spitzenform sein muß. Durch $\sqrt{(f-g,f-g)}$ ist ein Abstand der beiden Formen gegeben, der der Dreiecksungleichung genügt. Sind zwei Formen als Linearkombinationen irgendwelcher Basisformen der Schar der ganzen Spitzenformen gegeben, so ist ihr inneres Produkt eine bilineare Hermitesche Form der Koeffizienten. Aus der Metrisierung gewinnt Verf. jetzt auf die einfachste Weise zahlreiche Tatsachen, die teils bisher noch unbekannt waren: Charakterisierung der Poincaréschen Reihen

$$G_{-\tau}(\tau, \nu) = \sum e^{2\pi i \nu M \tau} (m_1 \tau + m_2)^{-\tau}$$

mit ganzem $\nu \geq 0$ durch innere Eigenschaften. — Es steht nämlich $G_{-\tau}(\tau,0)$ auf allen ganzen Spitzenformen, $G_{-\tau}(\tau,\nu)$ auf allen Spitzenformen, deren ν -ter Fourierkoeffizient verschwindet, orthogonal und $G(\tau,1)$, $G(\tau,2)\ldots G(\tau,\mu)$ bilden eine Basis der ganzen Spitzenformen. Analoge Sätze ergeben sich für die Spitzenformen, deren s-ter Taylorkoeffizient an der vorgegebenen Stelle z_0 verschwindet. — Ist \mathfrak{S}_b die Schar der Multipla eines ganzen Divisors \mathfrak{d}_b , der die Spitzen des Fundamentalbereiches enthält, so kann Verf. Erzeugende der zu \mathfrak{S}_b orthogonalen Schar explizit durch Poincarésche Reihen darstellen. — Schließlich ergeben sich durch diese Methode auch einfache Beweise für verschiedene Tatsachen aus der Heckeschen Transformationstheorie der Modulformen (s. dies. Zbl. 16, 355 und 14, 439).

Selberg, Atle: Über die Fourierkoeffizienten elliptischer Modulformen negativer Dimension. (Helsingfors, 23.—26. VIII. 1938.) 9. Congr. des Math. scand. 320—322 (1939).

Für $k=3,4,\ldots; m=1,2,\ldots; I(\tau)>0$ besteht die elementare Beziehung

$$\sum_{-\infty}^{\alpha} (\tau + h)^{-k} \exp\left(-\frac{2\pi i m}{\tau + h}\right) = 2\pi i^k m^{\frac{1-k}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} n^{\frac{k-1}{2}} J_{k-1}(4\pi \sqrt{mn}) \exp(2\pi i n \tau).$$

Diese liefert eine Neubegründung der trigonometrischen Entwicklung von Teilbruchreihen der Gestalt $\sum (c\tau + d)^{-k} \exp\left(2\pi i m \frac{a\tau + b}{c\tau + d}\right)$ mit der Summationsbedingung 0 < a; $c \le |b|$, |d|; ad - bc = 1.

Differentialgleichungen, allgemeine Theorie:

Mitrinovitch, D. S.: Sur un problème de Darboux. Bull. Sect. Sci Acad. Roum. 20,

23-25 (1938).

G. Darboux [Théorie générale des surfaces, II (2° éd., 1915), p. 210] ha dato una trasformazione la quale permette, data un'equazione lineare $d^2y/dx^2 = [f(x) + h]y$, integrabile per tutti i valori della costante h, di dedurne un'altra (*) $d^2z/dx^2 = [\varphi(x) + h]z$ anch'essa integrabile per tutti i valori della costante h. — L'A. osserva che se Y(x) è un integrale dell'equazione di Riccati (**) $dY/dx + Y^2 = h\Phi(x)$, e si effettua il cambiamento

$$x = a$$
, $Y = \frac{1}{a'}y + \frac{1}{2}\frac{a''}{a'^2}$ $[a' = da/dx, a'' = d^2a/dx^2]$

 $con \int \!\! \sqrt[4]{\varphi(a)} \, da = x$, si ottiene l'equazione $dy/dx + y^2 = \varphi(x) + h$, $\varphi(x) = \frac{1}{4} (a''/a')^2 - \frac{1}{2} (a''/a')'$ la quale, posto y = (1/z) dz/dx si trasforma nella (*), perciò se la (**) è integrabile per tutti i valori della costante h, anche la (*) risulterà integrabile per tutti i valori della costante h. Giovanni Sansone.

Hutchinson, C. A.: Another note on linear operators. Amer. Math. Monthly 46, 161 (1939).

Trjitzinsky, W. J.: Singular point problems in the theory of linear differential

equations. Bull. Amer. Math. Soc. 44, 209-223 (1938).

Verf. bietet einen übersichtlichen Bericht (mit ausführlicher Formulierung der Sätze und knappen Beweisandeutungen) über neuere allgemeine Ergebnisse, betreffend asymptotische Integration linearer Differentialgleichungen, und zwar in der Hauptsache über seine Arbeiten: Acta math. 62 (1934), 67 (1936), Trans. Amer. Math. Soc. 36 (1935). Behandelt werden die Gleichungstypen

(A)
$$L_n(y) = \sum_{r=0}^n a_r(x) y^{(n-r)} = 0$$
 (x komplex, $\to \infty$),

(B) $L_n(x, \lambda; y) = \sum_{\nu=0}^n a_{\nu}(x, \lambda) y^{(n-\nu)} = 0$ (x reell, $a \le x \le b$, λ komplex $\to \infty$). Im Falle (A) sind die Koeffizienten hierbei durch (konvergente oder asymptotische) Potenzreihen der Form $\sum_{n=m}^{\infty} \gamma^n x^{-\frac{\nu}{p}}$ $(m \ge 0)$ dargestellt, im Falle (B) durch entsprechende Reihen nach λ^{-1} , mit unbeschränkt differenzierbaren Funktionen von x als Koeffizienten. Es gibt im Falle (A) ein Fundamentalsystem formaler Lösungen $e^{Q_i(x)}x^{r_i}\sigma_i(x)$ Q_i Polynome in $x^{\frac{1}{k_i}}$, σ_i Polynome in $\lg x$ mit gewöhnlichen Potenzreihen in $x^{-\frac{1}{k_i}}$ als Koeffizienten), im Falle (B) ein solches der Form $e^{Q_i(x,\lambda)}\sigma_i(x,\lambda)$ Q_i Polynome in $\lambda^{\frac{1}{k_i}}$; σ_i Potenzreihen nach $\lambda^{-\frac{1}{k_i}}$. Es handelt sich um die Frage, inwieweit bzw. in welchem Sinne, insbesondere in welchem Gebiet diese Reihen asymptotische Darstellungen "wirklicher" Lösungen sind, schließlich im Falle (1) (bei p=1) um die Darstellung dieser Lösungen durch konvergente (Fakultäten) Reihen (Summation). Dabei ist wesentlich, daß hier keine einschränkenden Voraussetzungen wie Logarithmenfreiheit u. dgl. gemacht werden. Im Falle (A) gibt es in geeigneten, von Kurven $\Re Q_i = \Re Q_k$ (oder zu solchen asymptotisch parallelen) begrenzten Gebieten jeweils ein Fundamentalsystem von Lösungen, für die die formalen Lösungen asymptotische Entwicklungen sind; im Falle (B) kann man zu gegebenem ganzzahligen a zunächst ein Lösungssystem angeben, das (für x in einem Teilintervall) durch die formalen Reihen "von a-ter Ordnung" asymptotisch dargestellt wird; hieraus kann man auch von α unabhängige Lösungen mit voller asymptotischer Entwicklung bilden. Die konvergenten Fakultätendarstellungen werden schließlich im Anschluß an Hornsche Methoden auf dem Weg über Laplacetransformation gewonnen; sie gelten in Winkelräumen. Wie an einem Beispiel gezeigt wird, braucht es aber nicht zu jeder formalen Lösung eine summierende Fakultätenreihe zu geben. Hermann Schmidt (Jena).

Hurd, C. C.: Asymptotic theory of linear differential equations containing two parameters. Tôhoku Math. J. 45, 58—68 (1938).

Verf. behandelt die Differentialgleichung

$$\sum_{\nu=0}^{n} b_{\nu}(x, \lambda_{1}, \lambda_{2}) y^{(n-\nu)}(x, \lambda_{1}, \lambda_{2}) = 0,$$
 (1)

deren Koeffizienten für $\varrho \leq |\lambda_1|, |\lambda_2| < \infty$ reguläre Funktionen der beiden komplexen Parameter λ_1, λ_2 sein sollen, mit in einem Intervall unbeschränkt nach x differenzierbaren Laurentkoeffizienten. Er bestimmt formale Lösungen der Gestalt (2) $e^{Q(x, \lambda_1, \lambda_2)} \cdot \sigma(x, \lambda_1, \lambda_2)$, worin Q für hinreichend große $|\lambda_1|, |\lambda_2|$ regulär ist [mit Anfangsexponenten bei Entwicklung nach $\lambda_1^{-1}, \lambda_2^{-1}$, die nicht kleiner sind, als die in (1) auftretenden], dagegen σ eine formale gewöhnliche Potenzreihe nach $\lambda_1^{-1}, \lambda_2^{-1}$. Ein Beweis für die asymptotische Darstellung wirklicher Lösungen durch (2) wird im Anschluß an Trjitzinsky [Acta math. 62 (1933)] skizziert. Es wird dabei definiert: $s(x,\lambda_1,\lambda_2)_{k_1,k_2}\sigma$, wenn nach Berücksichtigung der Glieder mit $\lambda_1^{-\nu_1}\lambda_2^{-\nu_2}$ ($0 \leq \nu_j \leq k_j - 1$) rechts der Fehler $= O(\lambda_1^{-k_1}) + O(\lambda_2^{-k_2})$ ausfällt $(\lambda_1,\lambda_2\to\infty)$. Zu (2) ergeben sich dann jeweils bei gegebenem Paar k_1,k_2 wirkliche Lösungen der Form $e^Q \cdot s$ mit s_{k_1,k_2} σ .

Hukuhara, Masuo: Sur les propriétés asymptotiques des solutions d'un système d'équations différentielles linéaires contenant un paramètre. Mem. Fac. Engrg., Kyushu Imp. Univ. Fukuoka 8, 249—280 (1937).

Verf. betrachtet das Differentialsystem (1) $(y'_k) = (y_k)A(x, \lambda)$ unter verschiedenen Annahmen über die Abhängigkeit der Elemente der Matrix A von der reellen oder komplexen unabhängigen Veränderlichen x und dem komplexen Parameter λ . A ge-

stattet stets eine Entwicklung (2) $\sum_{\nu=m}^{\infty} A_{\nu} \lambda^{-\nu}$, die für $|\lambda| > R$ konvergiert oder für

 $\lambda \to \infty$ in einem Gebiet D asymptotisch ist; daneben treten von Fall zu Fall hier nicht im einzelnen wiederzugebende Voraussetzungen über Stetigkeit von A in x, λ bzw. Stetigkeit und Differenzierbarkeit nach x bei den A_{ν} . Für reelle x ($\alpha \le x \le \beta$) wird zunächst im Falle $m \ge 0$ [siehe (2)] die Existenz eines Fundamentalsystems mit entsprechender Darstellung gezeigt. Dann folgen Sätze über formale Reduktion von (1) auf Normalformen. So läßt sich durch eine Transformation Y = Y * P, in der P nur

Polynome hinsichtlich $\lambda^* = \lambda^{\frac{1}{\beta}}$ ($\beta > 0$, ganz) enthält, (1) in die Form bringen $V'^* = V^*$ ($F + A^*$); hier hat $F = (f_j \delta_{jk})$ volle Diagonalform mit Elementen, die Polynome in λ^* sind, während für A^* in der (2) entsprechenden Entwicklung m > 0 ist. Diese Form wird dann (unter Weglassung der Sterne) zugrunde gelegt. Falls die sämtlichen Größen $\Re (f_j - f_k)$ für $\alpha \le x \le \beta$, $\lambda \in D$ ihr Zeichen nicht wechseln $(j, k = 1, \ldots, n)$, gibt es ein Fundamentalsystem mit asymptotischer Darstellung

 $y_{jk} \sim e^{F_k(x,\lambda)} \sum_{r=1}^{\infty} p_{jk,r}(x) \lambda^{-r}$ ($F_k = \int f_k(x,\lambda) dx$). Aber auch beim Auftreten von Vorzeichenwechseln ganz bestimmter Art werden einzelne Lösungen mit derartigen Darstellungen erhalten; hierin dürfte in der Hauptsache das sachlich Neue der Arbeit gelegen sein. Zum Schluß folgen Übertragungen auf komplexes, in einem einfachzusammenhängenden Gebiet veränderliches x, auf dessen Randkurve die $\Re f_j$ gewisse Ungleichungen erfüllen müssen. Methodisch beruht die Arbeit in wesentlichen Punkten auf früheren Hilfssätzen des Verf. (vgl. dies. Zbl. 9, 16 u. 16, 305).

Hermann Schmidt (Jena).

Mahler, K.: On the solutions of algebraic differential equations. Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc. 42, 61—63 (1939).

A simpler proof of the following theorem of J. Popken: Let the power series $f(z) = a_0 + a_1 z + \cdots$ with coefficients in a finite algebraic field K formally satisfy

the algebraic differential equation

 $F(z, f(z), f'(z), \dots, f^{(m)}(z)) = 0$, where $F(z, y_0, y_1, \dots, y_m) \neq 0$

is a polynomial in K. Then there is a positive number c independent of n, such that for all sufficiently large indices, either

$$a_n = 0$$
, or $|a_n| \ge e^{-cn(\log n)^2}$

(Thesis, Theorem 12; this Zbl. 13, 270.) The proof depends on two theorems of G. Pólyà (this Zbl. 12, 76).

J. F. Koksma (Amsterdam).

Drach, Jules: Sur l'application de la méthode de Darboux aux équations à caracté-

ristiques explicites x, y. C. R. Acad. Sci., Paris 208, 1181—1185 (1939).

Soit (1) s=f(x,y,z,p,q) une équation du second ordre. Dans la note présente il s'agit d'une méthode de la recherche des invariants $\varphi(x,y,z,p,p_1,\ldots,p_n)$ d'ordre $n+1\geq 2$ de l'équation (1), où $p_1=\partial p/\partial x,\ p_2=\partial^2 p/\partial x^2,\ldots$ On a évidemment l'identité $d\varphi/dy=0$, compte tenu de (1) et de ses dérivées en x. On suppose que φ est le premier invariant pour le système (x) et qu'il est entier et de degré minimum en p_n ; cela entraı̂ne qu'il est de la forme $\varphi=\lambda p_n+A_1p_1p_{n-1}+A_2p_2p_{n-2}+\cdots$, où λ,A_1,A_2,\ldots ne dépendent que de x,y,z,p. Pour trouver ces coefficients on pose $\lambda=\partial\theta(x,y,z,p)/\partial p$ et on remplace l'équation (1) par une équation de la forme $d\theta/dy=\mu(x,y,z,q)$. La fonction φ prend alors la forme $\varphi=d^n\theta/dx^n+A(d\theta/dx)(d^{n-1}\theta/dx^{n-1})+B(d^2\theta/dx^2)(d^{n-2}\theta/dx^{n-2})+\cdots$. La relation $d\varphi/dy=0$ et la permutabilité de d/dx avec d/dy donnent une identité en $d\theta/dx,d^2\theta/dx^2,\ldots$ entraı̂nant les équations relatives aux coefficients A,B,\ldots , fonctions de x,y,z,θ . — Une discussion est faite pour les c as n+1=2,3,4.

Drach, Jules: Application de la méthode de Darboux aux équations s = f(x, y, z, y)

p, q): Invariants rationnels. C. R. Acad. Sci., Paris 208, 1371-1375 (1939).

Il s'agit d'une méthode de la recherche des invariants $\varphi(x, y, z, p, p_1, \ldots, p_n) = F(x)$ rationnels en p_1, \ldots, p_n , où $p_1 = \hat{o} p/\hat{o} x$, $p_2 = \hat{o} p_1/\hat{o} x$, ..., d'une équation différentielle partielle s = f(x, y, z, p, q) du second ordre. La méthode est basée sur les mêmes principes dont l'au. s'est servi dans son travail au sujet des invariants entiers (voir le Ref. precedent).

O. Borûvka.

Heilbronn, Georges: Sur la construction des équations s + f(x, y, z, p, q, r) = 0 qui possèdent un invariant du second ordre. C. R. Acad. Sci., Paris 208, 1380—1382

(1939).

En appliquant la théorie de M. Drach concernant les équations partielles du second ordre [Atti Cong. Int. Bologna 3, 11—25 (1928)] et sa méthode récente de la recherche des invariants entiers et rationnels de l'équation s = f(x, y, z, p, q) (voir les deux ref. precedants), l'au. étudie les équations s + f(x, y, z, p, q, r) qui possèdent un invariant du second ordre. Une étude approfondie est faite pour les équations linéaires en r, s + ar + b = 0.

O. Borûvka.

Täcklind, Sven: Sur un problème relatif à l'équation de la chaleur. (Helsingfors,

23.—26. VIII. 1938.) 9. Congr. des Math. scand. 297—300 (1939).

Soit H(y) une fonction positive et décroissante pour 0 < y < 1. Si la fonction $\sqrt{\log^+ H(y)/y}$ est sommable de 0 à 1, l'auteur établit que toute fonction z(x, y) telle que, dans le champ 0 < y < 1, |x| < L, on ait $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial z}{\partial y}$, $|z(x, y)| \le H(y)$ et $\lim_{y \to 0} z(x, y) = 0$, est aussi telle qu'or ait |z(0, y)| < k(L, H) pour 0 < y < 1, le second membre étant une constante qui ne dépend que de L et de H. Exemple d'une autre fonction H qui ne jouit pas de la propriété analogue. Georges Giraud.

Moisil, Gr. C.: Sur les bicaractéristiques des équations aux dérivées partielles du type parabolique et d'ordre supérieur. Bull. Math. Soc. Roum. Sci. 41, 79—90 (1939).

Soit $H(x^n, p_n)$ (n = 1, ..., m) une fonction homogène et d'ordre g par rapport aux p_n . En supposant que le hessien $\|\partial^2 H/\partial p_n \partial p_q\|$ est nul, et en nommant r < m le rang de la matrice correspondante, on considère les équations de Hamilton $\dot{x}^n = dH/\partial p_n$, $\dot{p}_n = -\partial H/\partial x^n$. L'ensemble des courbes intégrales est situé sur une

variété de Monge, appelée ici variété totalement caractéristique, et qui est définie par des équations telles que $\dot{x}^{\alpha} = \psi^{\alpha}(x^n, \dot{x}^j)$ $(j=1,\ldots,r;\ \alpha=r+1,\ldots,m)$. En posant $L=-H+\sum p_n\dot{x}^n$, les courbes intégrales sont identiques aux extrémales de $\int Ldt$ sur la variété totalement caractéristique. Cas particulier cù le rang est 1: on a une équation $\partial^g z/(\partial x^1)^g=$ une fonction des dérivées de z d'ordre < g. L'auteur examine encore le cas de certaines équations régulières, qui se ramène au cas où H ne dépend pas des p_{α} dont l'indice α est >r. Georges Giraud (Bonny-sur-Loire).

Devisme, Jacques: Sur les tétraèdres de l'espace attaché à l'équation de M. Pierre

Humbert. C. R. Acad. Sci., Paris 208, 1543-1544 (1939).

Im Zusammenhang mit der Humbertschen Gleichung $\Delta_3 u \equiv \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 u}{\partial z^3} - 3\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z} = 0$ hat Verf. einen metrischen Raum eingeführt (dies. Zbl. 3, 208; 6, 18; 7, 16). Trägt man in diesem auf den Achsen eines Appellschen Trieders die Längen a, b, c ab, so entsteht ein Tetraeder, bei dem zwischen den Inhalten der Seitenflächen, den Kantenlängen und Höhen elegante Beziehungen bestehen. Harald Geppert.

Differential- und Integralgleichungen der mathematischen Physik, Potentialtheorie:

Backman, Gaston: Relativität des Wachstums. Fysiogr. Sällsk. Lund Förh. 8, 153-165 (1939).

Sind bei einem wachsenden Organismus h die Wachstumsgeschwindigkeit, t das zugehörige Alter, h_m die Höchstgeschwindigkeit und t_m die zugehörige Zeit, so sind $H = h/h_m$ und $T = t/t_m$ die sog. Normalkoordinaten des Organismus. Verf. stellt das folgende empirische Wachstumsgesetz auf: $\log H = k \cdot (\log T)^2$, worin k eine negative Lebenskonstante ist, die die Lebenszeit des Organismus bestimmt. Das Gesetz gestattet insbesondere den Vergleich verschiedener Organismen. Verf. gibt ihm fünf verschiedene, mathematisch gleichwertige Formen.

Harald Geppert (Gießen).

Wetzel, Norman C.: On the motion of growth. XVII. Theoretical foundations.

Growth 1, 6-59 (1937).

Grundlegung einer Theorie des Wachstums, die mit den Begriffen der Mechanik, speziell der Lagrangeschen Gleichungen arbeitet. In der Einleitung wird die Auffassung des Wachsens als eines Bewegungsvorgangs begründet; dann folgen Definitionen von prinzipiell meßbaren Größen, welche zur Beschreibung des Wachsens dienen sollen. Die Wachstumsmenge ist $q=\lg z/z_0$; z ist ein Maß für die Größe des Systems, Verf. verwendet dafür die Masse, z_0 ist der Anfangswert von z. Das Wachstum selbst ist gegeben durch die zeitliche Veränderung von q, d. h. durch die Kurve, welche q als Funktion von t beschreibt. Soweit die Kinematik des Wachsens. Für die dynamische Beschreibung werden die Begriffe gebildet: die zur Erhaltung des bestehenden Zustandes des Systems nötige Wärme A' (Erhaltungswärme) pro g und sec, die pro g und sec zugeführte und ausgenutzte Energiemenge M', die gesamte pro g und sec vom System ausgegebene Wärme U, die infolge des Wachsens ausgegebene Wärme (Wachstumswärme) H_g , wobei $U=H_g+A'$. H_g besteht aus einem Teil H_d (Dissipationswärme), der in einfachen Fällen proportional \dot{q}^2 ist, und einem Teil H_d (Aufbauwärme), der proportional \dot{q} angesetzt wird. Für das Wachsen gilt ein Trägheitsgesetz der Erhaltung der Wachstumsgeschwindigkeit, solange keine äußere Einwirkung stattfindet; ferner kann eine potentielle Energie definiert werden (V), die von der Entfernung des Systems vom Gleichgewichtszustand ($\dot{q}=0$) abhängt. Beim Aufstellen der Lagrangegleichung zeigt es sich zweckmäßig, die kinetische Energie $T_m=\lambda(q)\cdot\dot{q}^2/2$ auf die Masseneinheit zu beziehen und ebenso bei V zu verfahren (V_m) ; q wird als verallgemeinerte Koordinate benutzt. Die Grundgleichung des Wachstums lautet dann, nach Multiplikation mit \dot{q} :

$$\left\{ rac{d}{dt} \left(rac{\partial T_m}{\partial \dot{q}}
ight)
ight\} \dot{q} - rac{\partial (T_m - V_m)}{\partial q} \dot{q} + U = P_g \dot{q} + M';$$

 P_g ist die zu H_g gehörige verallgemeinerte Kraftkomponente. Für V_m kann in der Nähe des Gleichgewichtes in bekannter Weise $V_m = q^2/(2 \varkappa)$ gesetzt werden; $H_d = \varrho \,\dot{q}^2, \, H_c = P_e \,\dot{q}$, für $P_g - P_c$ wird die Abkürzung P_m eingeführt und der Ansatz gemacht: $P_m = E + E_0 \cos(\theta t - \zeta) \exp(-\beta t)$. Die Bewegungsgleichung für Vorgänge, die nicht zu weit vom Gleichgewicht entfernt sind, läßt sich durch eine Potenzreihe $q = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ integrieren. Für den besonders einfachen Fall M' = A' (normales Wachstum) kann die Lösung in bekannter Weise in geschlossener Form angegeben werden. Die Aussagen über das Verhalten von q und den Energieumsatz beim

Wachsen stimmen mit den Beobachtungen sehr gut überein. Zum Schluß wird der Fall des vollständigen Hungerns (M'=0) und der spärlicher Nahrungszufuhr behandelt. Bechert.

Malkin, I.: Über die Stabilität der Bewegung im Sinne von Liapounoff. Rec. math. Moscou 3, 47—100 u. deutsch. Zusammenfassung 100—101 (1938) [Russisch].

Le but principal de ce travail est l'étude du système différentiel

$$\frac{dx}{dt} = X$$
, $\frac{dy}{dt} = Y$, $\frac{dx_s}{dt} = p_{s1}x_1 + p_{s2}x_2 + \cdots + p_{sn}x_n + X_s$ $(s = 1, 2, \ldots n)$

à n+2 inconnues $x, y, x_1 \ldots x_n$. X, Y et X_s sont des fonctions holomorphes au point $x=y=x_1=\cdots=x_n=0$ dont les développements en série de Maclaurin ne contiennent pas les termes de degré de zéro et un. Les coefficients de ces séries sont des fonctions de t réelles, continues et bornées. Les coefficients p_{sk} sont des fonctions continues et bornées de $t(0 < t < \infty)$; on peut construire trois formes quadratiques W, W_1, W_2 des variables $x_1 \ldots x_n$ telles que $W(t, x_1 \ldots x_n) > W_s(x_1 \ldots x_n)$

$$\geq W_1(x_1, \ldots x_n),$$

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \sum_{s=1}^n \frac{\partial W}{\partial x_s} (p_{s1}x_1 + \cdots + p_{sn}x_n) \leq -W_2(x_1, \ldots x_n).$$

Les coefficients de W sont des fonctions bornées de t; W_1 et W_2 sont des formes définies positives et indépendantes de t.—Soient X^0 , Y^0 , X^0_i les expressions que l'on obtient en substituant $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$ dans X, Y, X_s , et $X^{(m)}(x, y)$, $Y^{(m)}(x, y)$ les deux formes de degré m, ensemble de termes du degré moins élevé dans le développement de X^0 ou de Y^0 . Nous supposons que les coefficients de ces formes sont constants et qu'il n'y a pas de termes de degré plus petit que m dans le développement de X^0_s . Si les $x_1 \dots x_n$ sont en général différents de zéro, le mouvement est troublé; si $x_1 = \cdots = x_n \equiv 0$, nous avons le mouvement non troublé. Cela posé 1° Si la forme $G(x, y) = x Y^{(m)}(x, y) - y X^{(m)}(x, y)$ n'est pas définie et si la forme $P(x, y) = x X^{(m)}(x, y) + y Y^{(m)}(x, y)$ peut avoir des valeurs positives sous l'hypothèse G = 0, le mouvement non troublé est stable. 2° Le mouvement non troublé est asymptotiquement stable, si, pour toutes les valeurs (x, y) différentes de (0, 0) et telles que G = 0, la forme P ne prend que des valeurs négatives. 3° Si G est définie et si la quantité

$$\lambda = \int_{0}^{2\pi} \frac{P(\cos\theta, \sin\theta)}{G(\cos\theta, \sin\theta)} d\theta$$

est différente de zéro, le mouvement non troublé est asymptotiquement stable pour $\lambda G < 0$ et instable pour $\lambda G > 0$. — Le cas des mouvements stationnaires est traité dans la seconde partie du travail et les solutions périodiques dans la troisième.

B. Hostinský (Brünn).

Makaroff, S. M.: Quelques généralisations des théorèmes fondamentaux de Liapounoff sur la stabilité du mouvement. Bull. Soc. phys.-math. Kazan, III. s. 10, 139—158 u. franz. Zusammenfassung 159 (1938) [Russisch].

Le problème de la stabilité du mouvement, considéré par Liapounoff, consiste à rechercher les mouvements voisins du mouvement donné. L'auteur généralise l'énoncé de Liapounoff en introduisant des paramètres auxiliaires $p_1, p_2 \ldots p_n$. Les coordonnées $x_1, x_2, \ldots x_n$ du système mécanique satisfont, comme fonctions du temps t, aux équations $\frac{dx_s}{dt} = X_s(x_1, x_2, \ldots x_n, t, p_1, p_2, \ldots p_n, (s = 1, 2, \ldots n),$ où les X_s sont des fonctions dérivables des variables t, x_i, p_i ; les paramètres p_s satisfont aux équations $\frac{dp_s}{dt} = P_s(p_1, p_2, \ldots p_n, t)$ où les P_s sont des fonctions holomorphes des variables p_i qui sont égales à zéro pour $p_s = 0$ $(s = 1, 2, \ldots n)$. Supposons que les x_i et les p_i satisfont à ces équations. Une fonction $V(x_1, x_2, \ldots x_n, t, p_1, p_2, \ldots p_n)$ étant donnée

l'auteur introduit sa dérivée
$$V' = \frac{\partial V}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial V}{\partial x_i} x_i' + \frac{\partial V}{\partial p_i} p_i' \right)$$
, où $x_i' = \frac{dx_i}{dt}$, $p_i' = \frac{dp_i}{dt}$ et il

indique des conditions nécéssaires qui doivent être remplies pour déduire des domaines de l'espace $(x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n)$ où il y a stabilité. S'il est possible de trouver deux fonctions V et U telles que ces conditions soient remplies, il y a stabilité dans un certain domaine (Théorème I). Si d'autres conditions sont remplies, il y a instabilité (Théorèmes II et III). L'auteur donne des exemples simples.

B. Hostinský (Brünn).

Pleijel, Aake: Sur les propriétés asymptotiques des fonctions propres des plaques

vibrantes. C. R. Acad. Sci., Paris 208, 1549-1551 (1939).

 u_r , λ_r seien die normierten Eigenfunktionen und Eigenwerte des dreidimensionalen Plattenschwingungsproblems $\Delta \Delta u - \lambda u = 0$ mit der Randbedingung $u = \frac{\partial u}{\partial n} = 0$. In Übertragung eines von Carleman für die Membranschwingungen abgeleiteten Ergebnisses beweist. Verf. mittels der Partialbruchzerlagung der Schmidtschen Regeneration in der Schmidtschen Regeneration in der Partialbruchzerlagung der Schmidtschen Regeneration in der Schmidtschen Regene

In Übertragung eines von Carleman für die Membranschwingungen abgeleiteten Ergebnisses beweist Verf. mittels der Partialbruchzerlegung der Schmidtschen Resolvente der zugehörigen Integralgleichung und ihres asymptotischen Verhaltens für $\lambda = -x \rightarrow -\infty$ zunächst die asymptotische Beziehung

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{u_{\nu}^{2}(P)}{(\lambda_{\nu}+x)^{2}} \sim \frac{1}{16\pi\sqrt{2}} x^{-\frac{2}{4}},$$

woraus mittels eines Hardy-Littlewoodschen Satzes das asymptotische Gesetz der Eigenfunktionen

 $\lim_{n\to\infty} \lambda_n^{-\frac{1}{4}} \cdot \sum_{n=1}^n u_\nu^2(P) = \frac{1}{6\pi^2}$

folgt.

. Harald Geppert (Gießen).
Borbély, v.: Über einen Grenzfall der instationären räumlichen Tragflügelströmung.

Z. angew. Math. Mech. 18, 319-342 (1938).

An approximate method is given for the calculation of the aerodynamic forces due to harmonic oscillations of a wing of finite span. The method is analogous to Prandtl's method of calculating the effect of aspect ratio in steady motion. The wing is considered as a thin flat plate of large aspect ratio and it is assumed that the distribution of circulation along the span is elliptical. It is shown that the circulation can be determined approximately by the theory for the two-dimensional case if an effective angle of incidence be used instead of the geometrical angle for each position along the span. The correction to the local angle of incidence is a complex quantity and the calculated values of the real and imaginary parts are plotted for various positions on the wing and for a range of aspect ratios. The method of Kassner and Fingado [Luftfahrtforschg. 13, 374 (1936)] can then be used to calculate the aerodynamic derivatives. It is shown that in the limiting case of steady flow the local effective incidence is equal to that given by the Prandtl theory. H. M. Lyon.

Golab, St.: La discussion de l'équation générale du mouvement dans un milieu

résistant. Prace mat.-fiz. 46, 237-244 (1939).

Es wird untersucht, wann es durch jeden Punkt x_0 , y_0 genau eine Integralkurve der Differentialgleichung y'(x) = g(y) (g stetig) gibt. Die bekannte Bedingung, daß die Integrale $y_0 + \varepsilon$ $y_0 - \varepsilon$

 $\int_{y_0}^{y_0+\varepsilon} \frac{dy}{g(y)} \quad \text{und} \quad \int_{y_0}^{y_0-\varepsilon} \frac{dy}{g(y)}$

an jeder Nullstelle y_0 von g(y) divergieren müssen, wird in eine geometrische Form gebracht.

Kamke (Tübingen).

Biben, Georges: Sur l'intégration de l'équation de M. De Donder. C. R. Acad. Sci.,

Paris 208, 1486—1488 (1939).

Betrachtungen zur Integrationstheorie (im Hadamardschen Sinne) der de Donderschen fünfdimensionalen Wellengleichung

$$\Box \varphi + 2\varepsilon \Phi^{\alpha} \frac{\partial^{2} \varphi}{\partial x^{\alpha} \partial x^{5}} + \varepsilon^{2} (\Phi^{\alpha} \Phi_{\alpha} - 1) \frac{\partial^{2} \varphi}{(\partial x^{5})^{2}} + \frac{\varepsilon}{\sqrt{g}} \frac{\partial \Phi^{\alpha} \sqrt{-g}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial \varphi}{\partial x^{5}} = 0.$$

$$P. Jordan \text{ (Rostock)}.$$

Brelot, Marcel: Sur un balayage d'ensembles fermés. C. R. Acad. Sci., Paris 207, 1157-1159 (1938).

L'aut. définit d'abord les points-frontière stables pour le problème de Dirichlet relatif aux fonctions harmoniques d'au moins deux variables: C'est une notion analogue à celle de points réguliers, mais on y considère l'ensemble fermé et borné donné comme ensemble commun à une suite d'ensembles, réguliers pour le problème de Dirichlet, et dont chacun est contenu dans le précédent. La même suite d'ensembles sert à l'aut. pour définir une nouvelle opération qu'il nomme extrémisation, et qui généralise celle qu'il nomma hyperbalayage (ce Zbl. 19, 66 et 18, 258). Il établit que, dans l'espace à trois dimensions, certains nouveaux points réguliers, définis par de la Vallée Poussin (voir ce Zbl. 20, 130), sont identiques aux points stables, et cela permet d'appliquer un théorème d'unicité, établi par de la Vallée Poussin, grâce auquel l'opération est étendue, sous le nom de stabilisation, à des distributions de masses quelconques sur un ensemble fermé même non borné. Georges Giraud (Bonny-sur-Loire).

Integralgleichungen, Integraltransformationen:

Mania, Basilio: Autovalori di nuclei dipendenti dal parametro. Ann. Scuola norm. super. Pisa, II. s. 8, 89-104 (1939).

Die Arbeit behandelt Fredholmsche Integralgleichungen

$$\varphi(x) = \lambda \int_{\vec{x}} G(x, y; \lambda) \varphi(y) dy$$
 (1)

mit einem vom Parameter λ abhängigen Kern der Struktur

$$G(x, y; \lambda) = K(x \ y) + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda}{\lambda + a_i} H_i(x, y);$$

darin sind K, H_i symmetrische Funktionen von x, y, die eine quadratisch-integrierbare Majorante im Grundgebiet T aufweisen, die a_i sind reell und voneinander und von Null verschieden, $\sum |a_i|^{-1}$ ist konvergent; schließlich son für $a_i > 0 \ (< 0) H_i$ nicht semidefinit negativ (positiv) sein. Dann erschließt man leicht aus der Betrachtung des Verlaufes der oberen bzw. unteren Grenze $M(\lambda)$ bzw. $m(\lambda)$ des Funktionals $\iint G(x, y; \lambda) \varphi(x) \varphi(y) dx dy$ für alle normierten $\varphi(x)$, daß (1) mindestens einen reellen TT

Eigenwert besitzt; diese Schlußweise wird dann auf wesentlich allgemeinere Kerne $G(x, y; \lambda)$ erweitert. Ein großer Teil der Hilbert-Schmidtschen Theorie läßt sich auf (1) unter weiteren Einschränkungen übertragen. Sind die H_i für $a_i > 0$ (< 0) semidefinit positiv (negativ), so sind alle Eigenwerte reell; sind sie überdies gleichmäßig beschränkt und gilt für jedes H_i die Bilinearformel, so enthält jedes endliche, abgeschlossene, von den Punkten $-a_i$ freie Intervall der λ -Achse nur endlich viele Eigenwerte von (1); diese sind also abzählbar.

Haratd Geppert (Gießen).

Scorza Dragoni, Giuseppe: A proposito di un teorema sui sistemi di equazioni integrali non lineari. Atti Mem. Accad. Sci. Padova, N. s. 54, 123—133 (1938).

Dans un travail antérieur (voir ce Zbl. 15, 352), l'auteur a donné des conditions suffisantes pour que le système

$$f_j(x) + \int_a^b K_j(x, y) H_j[y, f_1(y), ..., f_n(y)] d_j y = g_i(x) \quad (j = 1, ..., n),$$

où les f_j sont les fonctions inconnues, ait une et une seule solution. Ici il indique un cas général où ces conditions sont remplies. Georges Giraud (Bonny-sur-Loire).

Kharchiladze, F. I.: Sur la représentation des fonctions par des intégrales singulières dans l'intervalle infini. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. 20, 339—342 (1938).

S. Bochner et S. Izumi (voir ce Zbl. 16, 116) ont établi des conditions suffisantes pour que l'on ait la relation

ation
$$+\infty$$

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} k(t)dt = f(x) \int_{-\infty}^{+\infty} k(t)dt;$$

ils supposent que la fonction f(t) est continue au point t=x. Cette note est consacrée à la généralisation des résultats cités pour le cas où la fonction f(t) satisfait à la condition

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_{x}^{x+h} [f(t) - f(x)] dt = 0.$$
B. Hostinský (Brünn).

Sakurai, Tokio: The application of operational methods to the theory of Hermite series. Tôhoku Math. J. 45, 265-279 (1939).

Ein neuer Beweis der Abgeschlossenheit der Hermiteschen Polynome für eine gewisse Klasse von Funktionen sowie der Entwicklung nach Hermiteschen Polynomen von Fouriertransformationen derselben Klasse von Funktionen. S. Kaczmarz (Lwów).

Sakurai, Tokio: Expansion of Hankel transform in the series of Laguerre's polynomials. Tôhoku Math. J. 45, 280-286 (1939).

Es wird unter Benutzung von Heavisides Operatorenrechnung die Hankeltransformation $H_0(x)$ der Funktion f(x) nach den Laguerreschen Polynomen entwickelt unter ziemlich einschränkenden Bedingungen für die Funktion f(x).

Sakurai, Tokio: On the operational images of sine and cosine transform and their application to integral equations. Tohoku Math. J. 45, 287-294 (1939).

Es sei $c(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \cos(ax\xi) f(\xi) d\xi$, $\gamma(p)$ und h(p) die Heavisideschen Transformationen von $\frac{1}{\sqrt{x}}c(\sqrt[0]{x})$, $\frac{1}{\sqrt{x}}f(\sqrt[]{x})$. Der Verf. beweist unter gewissen Voraussetzungen über f(x), daß $\gamma(p) = \frac{1}{\sqrt{2p}} h\left(\frac{a^2}{4p}\right)$. Das Resultat wird zur Auflösung der Integralgleichung $f(x) = \beta \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int \cos(\alpha x \xi) f(\xi) d\xi$ angewandt. Ein entsprechendes Resultat

gilt für die Sinustransformation s(x). S. Kaczmarz (Lwów).

Kober, H.: Wurzeln aus der Hankel-, Fourier- und aus anderen stetigen Transformationen. Quart. J. Math., Oxford Ser. 10, 45-59 (1939).

Die wichtigsten Sätze über stetige Transformationen im Hilbertschen Raume H sind: 1. Das System $\{\varphi_n(x)\}\$ sei in H abgeschlossen, η irgendeine Zahl $0 < |\eta| \le 1$. Dann und nur dann existiert eine lineare stetige Transformation T mit der Eigenschaft $T\varphi_n = \eta^n \varphi_n$ (n = 0, 1, ...), wenn für jedes Wertesystem $b_0, b_1, ..., b_m$ gilt $\left\|\sum_{0}^{m}b_{n}\eta^{n}\varphi_{n}\right\|\leq A\left\|\sum_{0}^{m}b_{n}\varphi_{n}\right\|,\ A\geq1.$ 2. Das System $\{\varphi_{n}(x)\}$ sei vollständig und orthonormal, r reell, $T_r t = \sum_{n=0}^{\infty} e^{2i\pi r n} \varphi_n(x) \int f(x) \varphi_n(x) dx$. Die Transformation $T_r f$ ist unitär

in H. 3. Die in 1. und 2. definierten Transformationen haben für $\eta_r = e^{2i\pi r}$ folgende Eigenschaften: a) $T_r^m = T_{mr} f$ für jedes ganze m. b) Die sämtlichen Eigenwerte von $T_r \text{ sind } e^{2i\pi rk} \ (k=0,1,\ldots).$ S. Kaczmarz (Lwów).

Variationsrechnung:

McShane, E. J.: The Jacobi condition and the index theorem in the calculus of variations. Duke math. J. 5, 184-206 (1939).

Verf. führt im einzelnen durch, wie sich die Blisssche Methode zur Behandlung der konjugierten Punkte für ein Variationsproblem in Parameterdarstellung (damit aber unmittelbar auch für ein gewöhnliches Problem) sehr einfach durchführen läßt unter Benutzung der "p-normalen" Lösungen des Jacobischen Gleichungssystems. Dazu definiert Verf. zu einem nichtsingulären Extremalenbogen $g: y^i = \gamma^i(t), t_1 \le t \le t_2;$ $i=1,\ldots,n$, einen bei Koordinatentransformation kovarianten Vektor $(p_i(t))$ von der Klasse C^2 mit $p_i(t)\gamma^i(t) \neq 0$, der sich bei Parametertransformation $t = t(\tau)$ durch $q_i(\tau) = k(\tau) p_i(t(\tau)), k(\tau) \neq 0$, ersetzt. Eine Funktion $\eta^i(t)$ mit $p_i(t) \eta^i(t) = 0$

heißt p-normal. Die Punkte $\gamma^i(t_1)$ und $\gamma^i(t_3)$ auf g heißen konjugiert, wenn eine pnormale Lösung $\eta^i(t)$ des Jacobischen Gleichungssystems existiert, die bei t_1 und bei t_3 (in allen Koordinaten) verschwindet. Diese Definition ist unabhängig von der speziellen Wahl des Vektors $(p_i(t))$, und die Familie der p-normalen Lösungen ist invariant bei Parameter- und bei Koordinatentransformation. Außer der Jacobischen Bedingung und den daran anschließenden Blissschen Sätzen über konjugierte Punkte liefert die Methode des Verf. einen modifizierten Beweis des Morseschen Index heorems.

McFarlan, L. H.: An envelope theorem for a special problem of Lagrange of the calculus of variations. Tôhoku Math. J. 45, 219-228 (1939).

Verf. hat schon früher (vgl. dies. Zbl. 9, 313) Lagrangesche Probleme mit festem Anfangspunkt (x_1, y_{i1}) und auf einer Kurve $(X_2(t), Y_{i2}(t))$ beweglichem Endpunkt untersucht, bei denen der Integrand und die Bedingungsdifferentialgleichungen die Koordinaten des beweglichen Endpunktes als Parameter enthalten; also:

$$I = \iint_{x_1} (x, y_i, y_i', x_2, y_{i2}) dx;$$

$$I = \text{Minimum unter den Nebenbed.}$$

$$m_i(x, y_i, y_i', X_2(t), Y_{i2}(t)) = 0$$

$$\varphi_{\alpha}(x, y_i, y'_i, X_2(t), Y_{i2}(t)) = 0,$$
 $\alpha = 1, 2, \dots m.$

Die vorliegende Arbeit setzt diese Untersuchungen fort und bringt insbesondere den Beweis des "Hüllensatzes" für dieses Problem. E. Lonn (Berlin).

Rapoport, I. M.: Die umgekehrte Aufgabe der Variationsrechnung. Bull. Soc. phys.math. Kazan, III. s. 10, 93—135 u. dtsch. Zusammenfassung 135—138 (1938) [Russisch].

Die Umkehraufgabe der Variationsrechnung besteht in der Ermittlung eines Funktionals bei vorgegebener Variation. Es werden also ein System totaler oder partieller Differentialgleichungen in den Funktionen $\varphi_j(x_1 \ldots x_m)$ $(j=1\ldots n)$ innerhalb eines Gebietes Q sowie Randbedingungen für φ_i und deren Ableitungen vorgegeben, und dann ist nach einem Integral über Q von einem Differentialausdruck der φ_i gesucht, dessen Extremalen Lösungen des Randwertproblems sind. In vorliegender Arbeit behandelt Verf. die Fälle, daß eine oder mehrere gewöhnliche Differentialgleichungen oder eine einzige partielle Gleichung vorgegeben sind. Er stellt zunächst die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Existenz des gesuchten Funktionals auf. Es folgt ein einfaches Verfahren zur Bestimmung des Funktionals, das einer Übertragung des Integrationsprozesses auf den Funktionalraum gleichkommt. Anwendungen ergeben sich bei der Zurückführung der Biegungsgleichung eines elastischen Stabes auf ein Variationsproblem und der Gewinnung des Hamiltonschen Prinzips aus den Grundgleichungen der Mechanik. Für den Inhalt sind frühere Arbeiten des Verf. (dies. Zbl. 18, 220, 367; 19, 268) zu vergleichen. Harald Geppert.

Morse, Marston: Sur le calcul des variations. Ann. Inst. H. Poincaré 9, 1-11 (1939). Kurze Einführung in die Theorie der kritischen Punkte und die Variationsrechnung im großen. Zuerst werden nichtausgeartete kritische Punkte auf Mannigfaltigkeiten betrachtet und die Ungleichungen $M^k \geq R^k$ zwischen den Typenzahlen und den Zusammenhangszahlen abgeleitet. Es folgt Anwendung dieser Ungleichungen auf das Variationsproblem der geodätischen Verbindungslinien zweier fester Punkte auf einer Mannigfaltigkeit, insbesondere auf dem topologischen Bild der n-Sphäre. Schließlich werden die Grundbegriffe der allgemeinen Theorie der kritischen Punkte eingeführt (homolog-kritische Punkte, F-Akzessibilität, obere Reduzibilität) und es wird die Notwendigkeit der Einführung von Vietoriszyklen an einem Beispiel erläutert.

Morse, Marston, and C. Tompkins: On the existence of minimal surfaces of general critical types. Proc. nat. Acad. Sci., Wash. 25, 153-158 (1939).

Morse, Marston, and C. Tompkins: The existence of minimal surfaces of general critical types. Ann. of Math., II. s. 40, 443-472 (1939).

Die Theorie der kritischen Punkte wird erstmalig auf mehrfache Integrale, und

zwar auf das Plateausche Problem angewandt. Im Hinblick auf diese Anwendung wurde die allgemeine Theorie schon früher von Morse so erweitert (Functional topology and abstract variational theory. Mém, Sci. math. 1939), daß danach nur noch die (keineswegs leichte) Aufgabe übrigblieb, die Voraussetzungen der allgemeinen Theorie im vorliegenden Falle der Minimalflächen zu verifizieren. Der Funktionalraum Ω wird gebildet von den eine Dreipunktbedingung erfüllenden Abbildungen φ der Kreislinie in die vorgegebene Raumkurve q, in die eine Minimalfläche vom Typus der Kreisscheibe eingespannt werden soll. Außerdem wird vorausgesetzt, daß das zur Abbildung φ gehörige Douglassche Funktional $A(\varphi)$ endlich ist. Die Hauptschwierigkeit besteht nun darin zu beweisen, daß für das Funktional $A(\varphi)$ auf Ω die Bedingung der "oberen Reduzibilität" erfüllt ist und daß zu jedem homolog-kritischen Punkt eine Minimalfläche gehört. Schließlich wird ein Beispiel einer Kurve angegeben, in welche sich zwei Minimalflächen vom Minimumtypus einspannen lassen. Auf Grund der allgemeinen Sätze über kritische Punkte muß es dann noch eine weitere Minimalfläche vom Nichtminimumtypus geben. H. Seitert (Heidelberg).

Shiffman, Max: The plateau problem for non-relative minima. Proc. nat. Acad. Sci., Wash. 25, 215—220 (1939).

Es werden die Beweise der folgenden Sätze skizziert: 1. Wenn eine Raumkurve Γ einer gewissen Klasse (z. B. mit stetiger Tangente) zwei Minimalflächen vom Zusammenhang der Kreisscheibe berandet, welche relative Minima sind, so berandet Γ wenigstens eine Minimalfläche, die kein relatives Minimum ist. 2. Die Morseschen Formeln für die kritischen Punkte lassen sich auf das Plateausche Problem anwenden. Seifert.

Funktionentheorie:

Lange, Luise: On a three-dimensional representation of functions of a complex variable. Amer. Math. Monthly 46, 190-198 (1939).

Um w=u+iv als komplexe Funktion w=f(z) der komplexen Veränderlichen $z=x+iy=re^{i\varphi}$ darzustellen, bedient sich die Verf. des folgenden räumlichen nomographischen Verfahrens: 2 Achsen eines räumlichen rechtwinkligen Koordinatensystems werden als u- und v-Achse genommen, die 3. Achse dient zum Auftragen entweder a) von r oder b) von x oder c) von y. Durch w=f(z) ist dann für jeden festen Wert a) von φ bzw. b) von y bzw. c) von x eine Raumkurve definiert. Die einparametrige Menge dieser Raumkurven mit φ bzw. y bzw. x als Parameter ist die Darstellung der komplexen Funktion w=f(z). Einige einfache analytische Funktionen werden auf die angegebene Weise dargestellt.

R. Sauer (Auchen).

Ballou, D. H.: On the location of the roots of real polynomial equations when two roots are equal. Amer. Math. Monthly 46, 209—212 (1939).

Ist P(z) ein Polynom n-ten Grades mit reellen Koeffizienten und ist $P(x+iy) = u(x,y) + i \cdot y \cdot v(x,y)$, so wird die Kurve $v(x,y) = P'(x) - y^2 \frac{P'''(x)}{3!} + y^4 \frac{P^{(5)}(x)}{5!} - \cdots = 0$ untersucht. Hat das Polynom P(z) eine doppelte Nullstelle und sind $a_k + ib_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n - 2)$ die übrigen Nullstellen von P(z), so sind die Punkte (a_k, b_k) reelle Brennpunkte der Kurve v(x, y) = 0. Gy. v. Sz. Nagy (Szeged).

Marković, Drag.: Sur quelques limites supérieures des modules des zéros d'un polynome. Mathematica, Cluj 15, 8—11 (1939).

Verf. gibt einen neuen Beweis für den folgenden Satz von van Vleck [Bull. Soc. Math. France 53, 1 (1925)] bzw. von Montel (Comment. math. helv. 7; dies. Zbl. 11, 50): Das Polynom $P(z)=a_0+a_1z+\cdots+a_pz^p+\cdots+a_nz^n$ hat im Kreise $|z|\leq\varrho_1$ bzw. $|z|\leq\varrho_2$ mindestens p Nullstellen, wo ϱ_1 bzw. ϱ_2 die positive Wurzel der Gleichung $|a_p|x^p-|a_{p-1}|C_q^1x^{p-1}-\cdots-|a_0|C_n^p=0$ bzw. $|a_n|x^n-|a_{p-1}|x^{p-1}-|a_{p-2}|C_q^1x^{p-2}-\cdots-|a_0|C_{n-1}^p=0$ bedeutet, q=n-p+1 und $C_n^k=\binom{n}{k}$ ist.

Aus diesem Satze von Montel leitet Verf. die folgenden Sätze ab: Ist r > 1 und ist $\alpha = \text{Max}\left\{\sqrt[q]{\left|\frac{a_{p-1}}{a_n}\right|}, \sqrt[q]{\left|\frac{a_{p-2}}{a_n}\right|}, \ldots, \sqrt[p]{\left|\frac{a_0}{a_n}\right|}\right\}$ bzw. $\beta = \text{Max}\left\{\sqrt[q]{\left|\frac{a_{p-1}}{a_n}\right|}, \left|\frac{a_{p-2}}{a_{p-1}}\right|, \ldots, \left|\frac{a_0}{a_1}\right|\right\}$, so hat das Polynom P(z) mindestens p Nullstellen in jedem der Kreise $|z| \le \alpha + \alpha^{\frac{r}{q}}$ und $|z| \le \beta + \beta^{\frac{r}{q}}$. Für r = 1 faßt dieser Satz zwei Sätze von Montel (a. a. O. S. 181 und 189) in sich.

Hadwiger, H.: Über Wurzelabschätzungen bei algebraischen Gleichungen. Mathe-

matica, Cluj 15, 157—164 (1939).

Es sei $K_n(\lambda)$ die positive Wurzel der Gleichung $x+x^2+\cdots+x^n=\frac{1}{\lambda}$ $(\lambda>0)$, es sei $c_0c_n \neq 0$ und es seien (für $k=1,2,\ldots,n$) $a_k=\underset{i=0}{\operatorname{Max}}\left|\frac{c_i}{c_n}\right|,\ a_k'=\underset{i=1}{\operatorname{Max}}\left|\frac{c_{n-i}}{c_n}\right|,$ $b_k=\underset{i=0}{\operatorname{Max}}\left|\frac{c_i}{c_0}\right|,\ b_k'=\underset{i=0}{\operatorname{Max}}\left|\frac{c_{n-1}}{c_0}\right|,\ na=\sum_{i=1}^n a_i,\ na'=\sum_{i=1}^n a_i',\ nb=\sum_{i=1}^n b_i,\ nb'=\sum_{i=1}^n b_i'.$ Dann liegen die Nullstellen des Polynoms $P(z)=c_0+c_1z+\cdots+c_nz^n$ in den beiden Ringgebieten $K\colon |z|\leq 1,\ R_n(b)\leq |z|\leq \frac{1}{R_n(a)}$ und $K'\colon |z|\geq 1,\ R_n(b')\geq |z|\geq \frac{1}{R_n(a')}.$ Im Falle $R_n(b)>1$ bzw. $R_n(a)>1$ ist das Gebiet K bzw. K' leer. — Dieser Satz ist eine Verallgemeinerung bekannter Sätze. $Gy.\ v.\ Sz.\ Nagy$ (Szeged).

Marden, Morris: Kakeya's problem on the zeros of the derivative of a polynomial.

Trans. Amer. Math. Soc. 45, 355-368 (1939).

Verf. beweist den folgenden Hilfssatz: Sind a_1, a_2, \ldots, a_p bzw. b_1, b_2, \ldots, b_q $(2 \le p \le n, q = n - p + 1)$ voneinander verschiedene Nullstellen eines Polynoms P(z) n-ten Grades bzw. seiner Derivierten P'(z), so besteht eine Relation $\sum \frac{A_{i_1 i_2 \ldots i_q}}{(b_1 - a_{i_1})(b_2 - a_{i_2}) \ldots (b_q - a_{i_q})} = 0 \ (1 \le i_k \le p), \text{ wo } A_{i_1 i_2 \ldots i_q} \ge 0 \text{ sind. Aus diesem Hilfssatz folgert Verf. die Sätze: Besitzt das Polynom <math>P(z)$ n-ten Grades p Nullstellen im Kreise k vom Radius k so besitzt k0 im konzentrischen Kreise k0 vom Radius k0 so besitzt k0 im konzentrischen Kreise k0 vom Radius k0 so besitzt k0 im konzentrischen Kreise k0 vom Radius k0 so besitzt k0 im konzentrischen Kreise k0 vom Radius k0 so besitzt k0 im Kreise k0 n-ten Grades in einem konvexen Gebiet k0 nullstellen, so besitzt k0 im Kreise k0 nullstellen im Gebiet k0 nullstellen, so hesitzt k0 des Polynoms k0 n-ten Grades im Kreise k1 nullstellen, so nimmt k1 nullstellen, so nimmt k2 nullstellen, so nimmt k3 nullstellen, so nimmt k4 nullstellen, so nimmt k5 nullstellen, so nimmt k6 nullstellen nullstellen nullstellen nullstellen nullstellen nullstellen nullstellen nullstellen nullstellen nullstell

nlieff, L.: Über die Nullstellen einiger Klassen von Polynomen. Tôhoku Math. J.

45, 259-264 (1939).

En se basant sur deux théorèmes d'Obrechkoff (voir ce Zbl. 8, 193 et Jber. Deutsch. Math.-Vereinig. 41, 33) l'au. démontre par une passage à la limite les résultats suivants: soit F(t) une fonction réelle, positive et non croissante dans (0, a), a > 0, et posons F(t) = F(-t), $0 > t \ge -a$. Soit f(x) un polynome dont les zéros se trouvent dans la bande $\alpha \le \Re(x) \le \beta$. Les zéros du polynome $\int_{-a}^{a} F(t) f(x+t) dt$ se trouvent aussi dans la même bande. Si les zéros du polynome $\varphi(x)$ de degré m sont dans

 $0 < r \le |x| \le R$ les zéros du polynome $\int_{-a}^{a} F(t) \gamma^{-\frac{m}{2}t} \varphi(\gamma^{t}x) dt$, γ réel, sont aussi situés dans le même domaine. N. Obrechkoff (Sofia).

Obrechkoff, Nikola: Sur les zéros des polynomes. C. R. Acad. Sci., Paris 208, 1270—1272 (1939).

Verf. gibt die folgende Verallgemeinerung eines Satzes von Laguerre (Oeuvres I, 199

bis 203): Liegt jede Nullstelle des Polynoms $f(z)=a_0+a_1z+\cdots+a_nz^n$ im Kreisgebiete $|z|\leqq r$ bzw. $|z|\geqq r$ und liegt jede Nullstelle eines Polynoms g(z) in der Halbebene $R(z)\geqq \frac{n}{2}$ bzw. $R(z)\leqq \frac{n}{2}$, so enthält das Kreisgebiet $|z|\leqq r$ bzw. $|z|\geqq r$ jede Nullstelle des Polynoms $h(z)=a_0g(0)+a_1g(1)z+\cdots+a_ng(n)z^n$ in sich. Gy. v. Sz. Nagy (Szeged).

Obrechkoff, Nikola: Sur les zéros de quelques classes de polynomes. Mathematica,

Cluj 15, 165—173 (1939).

En étendant quelques résultats de G. Pólya [Jber. Deutsch. Math.-Vereinig. 35, 48 (1926)], l'aut. démontre les propriétés suivantes: Soit $f(x) = \varphi(x) + \psi(x)$ réelle et paire dans $(-\lambda, \lambda)$. φ positive, non-croissante et ψ positive, non-décroissante dans $(0, \lambda)$, $\varphi(0) \leq \psi(0)$. Posons

 $I[g(t)] = \int_{-1}^{\Lambda} f(t)g(t)dt$, alors: 1° Le polynome I[P(z+it)] a au moins autant de zéros réels

que le polynome réel P(z). 2° I[Q(zit)] a tous ses zéros réels si Q(z) les a tous réels et négatifs. 3° $I[R(it) e^{tz}]$ a tous ses zéros réels si R(z) les a aussi tous réels. 4° Si les zéros du polynome F(z) sont tous situés entre deux droites parallèles à l'axe imaginaire il en est de même pour les zéros du polynome I[F(z+t)]. Ces propriétés restent valables si au lieu des polynomes Q, R, F on prend des fonctions entières limites de polynomes ayant seulement des zéros réels et négatifs, des zéros réels resp. des zéros compris entre deux parallèles à l'axe imaginaire. Relativement à ces dernières fonctions l'aut. démontre que pour que f(z) entière soit limite de polynomes ayant tous leurs zéros dans une bande D formée par deux parallèles à l'axe réel, il faut et il suffit qu'elle soit de la forme ($\gamma \geq 0$, $\alpha_n \subset D$)

$$c\,e^{-\gamma z^{i}+\delta z}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{\alpha_{n}}\right)e^{\frac{z}{\alpha_{n}}}\quad\text{avec}\quad\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{|\alpha_{n}|^{2}}<\infty,\quad-\sum_{n=1}^{\infty}\Im\left(\frac{1}{\alpha_{n}}\right)=\Im(\delta)\,.$$

Si D contient le point 0 il faut ajouter le facteur z^m , m étant 0 ou un nombre naturel. Les quelques erreurs du texte et de certaines formules intermédiaires peuvent être facilement rectifiées.

T. Popoviciu (Cernauti).

Littlewood, J. E., and A. C. Offord: On the number of real roots of a random alge-

braic equation. II. Proc. Cambridge Philos. Soc. 35, 133-148 (1939).

Für einen Teil der von J. E. Littlewood-A. C. Offord (dies. Zbl. 20, 136) mitgeteilten Ergebnisse werden die Beweise gegeben. Diese stützen sich u. a. auf einen Satz von Jensen über die Nullstellen analytischer Funktionen. Kamke (Tübingen).

Holzer, L.: Zwei Beispiele zum Verhalten von Potenzreihen auf dem Konvergenz-

kreis. Deutsche Math. 4, 190-193 (1939).

Es sei $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n$ eine bedingt konvergente Reihe mit lauter von Null verschiedenen Gliedern. Dann läßt sich stets eine Potenzreihe finden, bei welcher die aufeinanderfaltenden nichtversehwindenden Konffizionten durch die Folge $\{x_i\}$ $(n=0,1,2,\ldots)$

folgenden nichtverschwindenden Koeffizienten durch die Folge $\{\alpha_n\}$, $(n=0,1,2,\ldots)$ gegeben sind und welche bei passend gewählter Annäherung an die Stelle z=1 auf

Punkten aus |z| < 1 nicht den Grenzwert $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n$ besitzt. — Ferner wird an einem Beispiel gezeigt, daß eine auf dem Konvergenzkreise einer Potenzreihe $\mathfrak{P}(z)$ gelegene Konvergenzstelle z=a auch dann noch Häufungspunkt von auf dem Konvergenzkreise liegenden Divergenzstellen sein kann, wenn bei beliebiger Annäherung auf Punkten aus $|z| < |a| \mathfrak{P}(z)$ den Grenzwert $\mathfrak{P}(a)$ besitzt. Lammel (Prag).

Postoeva, N.: Sur le développement des fonctions d'une variable complexe en séries de polynômes. Rec. math. Moscou, N. s. 4, 549—560 u. franz. Zusammenfassung 560

(1938) [Russisch].

L'aut. considère quelques généralisations des polynomes connus de Faber. Soit B un domaine simplement connexe borné dans le plan x dont le complément B' est aussi un domaine simplement connexe. Soit $x=\psi(t)=1/t+\alpha_0+\alpha_1t+\cdots$ la fonction qui effectue la représentation conforme du cercle |t|< r sur B' et $P_n(x)=x^n+a_1^{(n)}x^{n-1}+\cdots+a_n^{(n)}=t^{-n}(1+\beta_n(t))$ une suite de polynomes. Sous l'hypothèse que la série $\sum |\beta_n(t)|$ converge uniformément dans |t|< r l'aut. démontre que chaque fonction f(x) régulière dans le domaine fermé B peut se développer suivant les polynomes $P_n(x)$

en une série $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(x)$, uniformément convergente. Soit C_{ϱ} l'image dans le plan x de la circonférence $|t| = \varrho$, $\varrho < r$. Si la fonction f(x) est régulière à l'intérieur de C_R et possède sur C_R des points singuliers, on a $\overline{\lim}_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = R$ et le développement converge à l'intérieur de C_R .

Cannon, B.: On the representation of integral functions by general basic series.

Math. Z. 45, 185—208 (1939).

Verf. betrachtet die zu gegebener Basisfolge gehörige Basisreihe einer Potenzreihe [dies. Zbl. 20, 232, (1) und (2)]. Den hinreichenden Bedingungen J. M. Whittakers (Interpolatory function theory. Cambridge 1935) für die Darstellbarkeit ganzer Funktionen durch Basisreihen (1) gelingt es Verf. notwendige und hinreichende Kriterien an die Seite zu stellen. Sei N_n die Anzahl der nicht verschwindenden Koeffizienten π_{ni} in (2) (dies. Zbl. 20, 232). Gilt $\underline{1}$

 $N_n^n \to 1 \quad \text{für} \quad n \to \infty,$ (3)

so ist

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{n\to\infty} \left[\left(\frac{epq}{n} \right)^{\frac{1}{p}} \left\{ \omega_n(R) \right\}^{\frac{1}{n}} \right] \gtrsim 1 \tag{4}$$

für jedes $R \ge 0$ notwendig und hinreichend für die Darstellbarkeit von ganzen Funktionen vom Typus < q der Ordnung p; analog mit

$$\{\omega_n(R)\}^{\frac{1}{n}} \to R \quad \text{bei} \quad n \to \infty$$
 (5)

für jedes $R \ge 0$ an Stelle von (4) für Darstellbarkeit analytischer Funktionen in ihrem

Regularitätskreis [für $\omega_n(R)$: dies. Zbl. 20, 232]. Um den Fall $N_n^{\frac{n}{n}} \to 1$ zu erfassen, betrachtet Verf. $F_n(R)$ (dies. Zbl. 20, 232) ansta : $\omega_n(R)$. Resultat: 1. Eesetzt man in (4) und (5) $\omega_n(R)$ durch $F_n(R)$, so fällt (3) weg. 2. Die Bedingungen Whittakers mit $F_n(R)$ an Stelle von $\omega_n(R)$ werden die "bestmöglichen". *Pfluger*.

Radojčić, M.: Sur l'ensemble des faisceaux transcendants au voisinage d'une singularité essentielle d'une fonction analytique. Bull. Acad. Sci. Math. Nat., Belgrade Nr 4, 159—167 (1938).

Die faisceaux transcendants sind die z-Bilder von Umgebungen der Randstellen Riemannscher Flächen, welche von w = f(z) erzeugt sind (vgl. auch dies. Zbl. 16, 168f.). Für die aus ihnen gebildete Menge wird eine Anordnung erklärt, indem jedes solche Bündel aus der singulären Stelle oder Linie S von f(z) durch eine Kurve C auf eine feste Kurve D des Analytizitätsgebiets "projiziert" wird derart, daß die C sich nicht schneiden. Dann können die Begriffe "zwischen", "dicht", "benachbart", "reduzierbar" übertragen werden. — Die Sätze des Verf. sind darauf gerichtet, aus einfachen Annahmen über die Flächenstruktur Aussagen über die so geordnete Randstellenmenge zu gewinnen, z. B.: Stößt jedes Blatt an mindestens 3 Verzweigungsstellen, darunter mindestens 2 Randstellen, so ist jene Menge dicht. Sonderfall: Annahme von 3 Ausnahmewerten; auch die Menge der Randstellen (Bündel), die einem Ausnahmewert entsprechen, ist dicht. — Umgekehrt: Stößt kein Blatt an unendlich viele Randstellen und fast alle Blätter überhaupt nur an zwei Verzweigungsstellen, so ist die Randstellenmenge endlich; das verallgemeinert bekannte Sonderfälle bei endlich vielen Windungssorten. — Bemerkenswert ist endlich der Satz: Stößt fast jedes Blatt an mindestens eine Randstelle, und ist deren Menge reduzierbar (d. h. eine genügend hohe Ableitung leer), so muß die Fläche grenzpunktartig sein. Das ist ein rein topologisch fundiertes Typenkriterium! Ullrich (Gießen).

Eger, Max: Sur une propriété caractéristique des fonctions harmoniques et biharmoniques. C. R. Acad. Sci., Paris 208, 1383—1385 (1939).

Dans un plan, soient M_j $(j = 1, ..., n; n \ge 3)$ des points qui tendent vers un point M donné, de façon que, ϱ étant un certain infiniment petit, on ait: $MM_j = O(\varrho)$, $\sum (x_j^2 - y_j^2) = o(\varrho^2)$, $\sum x_j y_j = o(\varrho^2)$, $\sum x_j = o(\varrho^2)$, $\sum y_j = o(\varrho^2)$. Alors on a, pour

toute fonction f telle que la limite existe, $\Delta f = \lim_{\varrho = 0} \frac{\mu(f) - f(M)}{\varrho^2}$, où $\mu(f)$ est la moyenne de f sur les M_f et Δ est le laplacien. Cette définition est invariante par toute transformation conforme. Indications sur un opérateur analogue, dont la nullité caractérise la partie réelle d'une fonction analytique de deux variables. Georges Giraud.

Bers, Lipman: Sur une représentation intégrale des fonctions biharmoniques dans les domaines possédant une surface frontière remarquable. C. R. Acad. Sci., Paris 208,

1273—1275 (1939).

L'auteur nomme fonction biharmonique la partie réelle d'une fonction analytique de deux variables. Soit $U(z_1,z_2)$ une fonction biharmonique dans l'ensemble E des points $|z_2| < 1$, $z_1 = t \, h(z_2,\lambda)$, où le paramètre réel t remplit la condition $0 \le t < 1$, et où $h(z_2,\lambda)$ est périodique par rapport au paramètre réel λ , et est analytique par rapport à z_2 quel que soit λ et remplit certaines autres conditions. Enoncés de propositions d'après lesquelles on a dans certains cas $U(z_1,z_2) = \int \int \Omega(z_1,z_2;\theta,\lambda) d\omega(\theta,\lambda)$, où ω est une certaine fonction d'ensemble, absolument continue, et l'intégrale est étendue à une partie de la frontière de E, savoir: la partie où l'on a t=1 et $z_2=e^{i\theta}(\theta$ réel). Enoncé d'une représentation analogue, mais sans intégrale de Stieltjes, pour toute fonction analytique et bornée dans le même ensemble. Georges Giraud.

Bers, Lipman: Sur les valeurs limites des fonctions analytiques de deux variables complexes dans les domaines possédant une surface frontière remarquable. C. R. Acad.

Sci., Paris 208, 1475—1477 (1939).

Ist $\mathfrak B$ ein Bereich im (w,z)-Raum mit einer ausgezeichneten Randfläche $\mathfrak F$:

$$z_1 = h(e^{i\vartheta}, \lambda), \quad z_2 = e^{i\vartheta},$$

und ist f(w, z) eine in \mathfrak{B} analytische Funktion, die eine gewisse Integraldarstellung zuläßt, so konvergiert f gleichmäßig in gewissen Winkelräumen mit Spitzen in Punkten P auf \mathfrak{F} . Ist f in \mathfrak{B} auch beschränkt, so liegen solche Spitzen P fast überall auf \mathfrak{F} . Tritt dabei zu häufig der Grenzwert 0 auf, so verschwindet f identisch. Behnke.

Wahrscheinlichkeitsrechnung, Statistik und Anwendungen. Wahrscheinlichkeitsrechnung, mathematische Statistik:

Bjerke, Bj.: Das Renkontreproblem. Norsk mat. Tidsskr. 21, 56-59 (1939) [Nor-

wegisch].

Die n Karten eines Kartenspiels seien mit den Nummern 1 bis n versehen. Man mischt und legt dann die Karten auf ebenfalls von 1 bis n numerierte Plätze. Wenn eine Kartenund eine Platznummer zusammenfällt, so nennt man dies eine Renkontre. Die Wahrscheinlichkeit s_r , daß eine r-fache Renkontre ($r \le n$) eintritt, wird mit Hilfe des Fellerschen Wahrscheinlichkeitsschemas berechnet. Resultat bekannt. H.L. Schmid (Gießen).

Kaplansky, I.: On a generalization of the "problème des rencontres". Amer. Math.

Monthly 46, 159—161 (1939).

Dans un jeu de cartes, il y a a_r cartes marquées r; $r=1,2,\ldots n$. Les cartes marquées r ne peuvent pas apparaître à p_r places déterminées. Par contre aucune place n'est exclue simultanément pour deux cartes r et s. L'auteur donne le nombre des arrangements soumis à ces restrictions. -- Il se trouve que des questions traitées par Netto (Lehrbuch der Combinatorik, pp. 80—82) et par Macmahon (Combinatory Analysis, I, 99—114) rentrent dans ce problème plus général. S. Bays.

Lévy, Paul: Sur les projections d'une loi de probabilité à n variables. Bull. Sci.

math., II. s. 63, 148—160 (1939).

(Cf. C. R. Acad. Sci. 206, 1240 et rectification p. 1699.) Étant donnée la fonction de répartition de n variables aléatoires X_1, X_2, \ldots, X_n : $F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \text{Prob.}\{X_1 < x_1, X_2 < x_2, \ldots, X_n < x_n\}$, on appelle projections de cette loi à n variables les lois obtenues en ne considérant qu'un certain nombre des variables X_i . La projection relative aux variables X'_1, X'_2, \ldots, X'_p (prises parmi les X_i) sera $G(x'_1, x'_2, \ldots, x'_p)$ et s'obtiendra en égalant à $+\infty$, dans F, les variables x_i autres

que x'_1, x'_2, \ldots, x'_p . Le problème proposé est le suivant: F étant inconnue, et un certain nombre de ses projections étant données, à quelles conditions doivent satisfaire ces projections pour que l'on puisse déterminer \hat{F} . — Dans le cas de 3 variables, si l'on se donne

 $G_1(y,z)=F(\infty,\,y,z)\,,\quad G_2(z,\,x)=F(x,\infty,z)\,,\quad G_3(x,\,y)=F(x,\,y,\infty)\,,$ on trouve les conditions nécessaires:

$$\int_{e_{\mathbf{a}}} d_y \int_{e_{\mathbf{a}}} d_z G_1(y, z) \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \min \left\{ d_x \int_{e_{\mathbf{a}}} d_z G_2(z, x), d_x \int_{e_{\mathbf{a}}} d_y G_3(x, y) \right\}$$

(et deux formules analogues qu'on obtient en permutant circulairement 1, 2, 3; x, y, z), où e_1 , e_2 , e_3 sont trois ensembles linéaires (réunion de points et d'intervalles) portés par les axes de coordonnées. — L'auteur montre sur un exemple (dans le cas discontinu) que les conditions nécessaires trouvées ne sont pas suffisantes. Il considère également le cas d'un nombre quelconque de dimensions, et donne le résultat: La solution du problème de la compatibilité des projections données, dans le cas général, se ramène à celle du même problème relatif au cas où chacune des variables X_{r} ne prend qu'un nombre fini de valeurs. Ville (Paris).

Borel, Émile: Sur une interprétation des probabilités virtuelles. C. R. Acad. Sci.,

Paris 208, 1369—1371 (1939).

Nous avons N objets analogues parmi lesquels A_i de l'espèce E_i ; $N = A_1 + A_2 + \cdots + A_k$. Choisissons au hasard n objets parmi ces N; nous obtenons une répartition comprenant a_i objets de l'espèce E_i ; $n=a_1+a_2+\cdots+a_k$. La probabilité $P_{a_1a_2...a_k}$ de cette répartition est donnée par la formule

$$P_{a_1 a_2 \dots a_k} = \frac{P(a_1, A_1) P(a_2, A_2) \dots P(a_k, A_k)}{P(n, N)} \quad \text{avec} \quad P(b, B) = C_B^b p^b q^{B-b}$$

où p et q sont deux nombres positifs quelconques, p+q=1. La formule précédente peut être remplacée par la formule équivalente

 $P_{a_1 a_2 \dots a_k} = p_1 \cdot p_2 \dots p_k$ avec $p_i = P(a_i, A_i)/[P(n, N)]^{\overline{N}}$

 p_i sont les probabilités virtuelles. L'auteur développe les considérations sur cette notion (voir C. R. Acad. Sci. 208, 1177; ce Zbl. 20, 380) et il trouve que tous les problèmes de répartition peuvent être traités comme si les N épreuves étaient indépendantes, bien qu'elles B. Hostinský (Brünn). ne le soient pas.

Dieulefait, C. E.: Bestimmung der Momente der gewöhnlichen hypergeometrischen Wahrscheinlichkeiten und Bestimmung der Momente für den Fall der Ansteckung.

An. Soc. Ci. Argent. 127, 108-117 (1939) [Spanisch].

Die charakteristische Funktion der gewöhnlichen hypergeometrischen Wahrscheinlichkeiten wird mit Hilfe komplexer Integrale für $\binom{m}{n}$ selbst auf ein komplexes Integral zurückgeführt; man erhält dann Ausdrücke für die Momente in Form von komplexen Integralen; diese Darstellung erweist sich zur Ermittlung der Momente, bezogen auf den Mittelwert, sehr zweckmäßig, da sie bemerkenswerte Rekursionsformeln ergibt. Das Verfahren wird auf den (allgemeineren) Fall der Wahrscheinlichkeitsansteckung (Wahrscheinlichkeiten P_v)

$$P_{v} = {r \choose v} \frac{\left(\frac{q}{\delta}, v\right)\left(\frac{p}{\delta}, r - v\right)}{\left(\frac{1}{\delta}, r\right)}; \quad (\alpha, n) = \alpha(\alpha + 1) \dots (\alpha + n - 1)$$

übertragen; die gevonnenen komplexen Integrale für die charakteristische Funktion, für die Momente und für die charakteristische Funktion bei Parallelverschiebung, so daß μ_1 = 0 wird, führen auch hier zu Rekursionsformeln für die Momente höherer Ordnung. F. Knoll (Wien).

 Bachelier, Louis: Les nouvelles méthodes du calcul des probabilités. Paris: Gauthier-Villars 1939. VIII, 71 pag. Fres. 25 .--.

In diesem Buch gibt Verf. einen Wegweiser für die von ihm in zahlreichen Arbeiten

im J. des Math. 1906, in den Ann. Sci. École norm. Sup. 1901, 1910, im Enseignement math. 1915, im Métaphys. 1925 und in den C. R. Acad. Sci., Paris 1908, 1910, 1913 entwickelte Theorie der wesentlich stetigen Wahrscheinlichkeiten oder der hyperasymptotischen Formeln. Unter Hinweis auf die genannten Arbeiten sowie auf mehrere Lehrbücher des Verf. werden die Hauptergebnisse ohne Beweis zusammengestellt.

M. P. Geppert (Bad Nauheim).

Onicescu, O., et Gh. Mihoc: Sur les sommes de variables enchaînées. II. mém. Bull. Math. Soc. Roum. Sci. 41, 99—116 (1939).

Considérons la suite de variables x_n (n = 1, 2, ...) pouvant prendre toute valeur dans l'intervalle a, b. Supposons que la probabilité pour x_{n+1} de prendre une valeur comprise entre y et y + dy quand nous avons eu $x_n = x$ est $\varphi(x, y)dy$, et que $\varphi(x, y) \ge 0$, $\int_{a}^{b} \varphi(x, y) dy = 1$. Soit $\Phi_n(x; z) dz$ la probabilité pour que le somme $x_1 + x_2 + \cdots + x_n$ prenne une valeur comprise entre z et z + dz, $\varphi(x, y) dy$ étant la probabilité pour que $y < x_1 < y + dy$. Soit $F_n(x; t; \vartheta) = \int_{na}^{b} e^{(z - n\vartheta)it} \Phi_n(x; z) dz$ la fonction caractéristique de la somme $x_1 + x_2 + \cdots + x_n - n\vartheta$. Les auteurs montrent comment les fonctions F_n peuvent être déduites de la solution de l'équation intégrale intégrale

The solution peut être mise sous la forme $F(x;t;\vartheta) = \lambda \int_{a}^{b} \varphi(x,u) e^{(u-\vartheta)it} F(u,t;\vartheta) du + 1.$ (1)

Cette solution peut être mise sous la forme $F(x,\vartheta) + 1 + \sum_{i=1}^{\infty} \lambda^{i} F_{i}(x;t;\vartheta)$ avec $F_{1}(x;t;\vartheta)$ $= \int_{-\infty}^{\infty} e^{(u-\vartheta)it} \varphi(x; u) du.$ Les auteurs trouvent les expressions des fonctions F_n en décomposant en éléments simples le noyau résolvant de l'équation intégrale (1). Chaque fonction F_n apparait comme une somme de termes relatifs aux différentes racines de l'équation $D(\lambda) = 0$, $D(\lambda)$ étant le dénominateur du noyau résolvant. Le travail contient des formules pour la valeur asymptotique du moment du premier ordre de la somme $x_1 + x_2 + \cdots + x_n - n\vartheta$, ainsi que la formule analogue pour le moment du second ordre, et une étude détaillée de différentes expressions asymptotiques (pour $n \to \infty$) relatives aux quantités x_k . B. Hostinský (Brünn).

Halphen, Etienne: Sur la covariation. C. R. Acad. Sci., Paris 208, 780-781 (1939). Es seien x(t), y(t) zwei von der Zeit abhängige Größen und $\xi(t)$, $\eta(t)$ die zugehörigen Zufallskomponenten. Erweist sich ein gewähltes Abhängigkeitsmaß zwischen diesen Komponenten als unabhängig von der Zeit, so zeigt Verf., daß der Beobachtungswert dieses Maßes mit Hilfe einer leichten Änderung von Methoden berechnet werden kann, welche für den üblich betrachteten Fall Zeit-unabhängiger Zufallskomponenten gelten.

Wold, Herman: Über stochastische Prozesse, insbesondere solche stationärer Natur. (Helsingfors, 23.—26. VIII. 1938.) 9. Congr. des Math. scand. 207—218 (1939).

Considérations générales sur les suites composées de quantités aléatoires x_t , x_{t-1} , x_{t-2}, \ldots qui dépendent du temps. Définitions relatives aux différents cas qui peuvent se présenter: Cas où les quantités aléatoires ne dépendent par l'une de l'autre; cas où il y a des relations fonctionnelles entre leur valeurs; cas où il y a des relations au point de vue de probabilité; convergence stochastique, schéma stochastique stationnaire. B. Hostinský (Brünn).

Kuzmin, R. O.: Sur la loi de distribution du coefficient de correlation dans les tirages d'un ensemble normal. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. 22, 298-301 (1939).

Soient x et y deux variables aléatoires en corrélation normale, c'est à dire dont la loi de répartition des probabilités est une loi de Gauss à deux dimensions. Soit r le coefficient de corrélation de z et y, \bar{r} la valeur empirique de ce coefficient, calculée sur les résultats de n épreuves. L'auteur montre que quand $n \to \infty$ la loi de répartition de la variable aléatoire \ddot{r} tend vers une loi normale, de moyenne r et de dispersion $\frac{1-r^2}{\sqrt{n-1}}$. Il donne une expression commode de cette loi de répartition pour les grandes valeurs de n.

Allen, H. V.: A theorem concerning the linearity of regression. Statist. Res. Mem.,

Univ. London 2, 60-68 (1938).

Suppose that two random variables x and y have the following structure: $x = a\xi + \alpha$, $y = b\xi + \beta$ where α , β and ξ are mutually independent random variables and a and b constant coefficients. If the first two moments of β and all moments of α and ξ are finite, then the necessary and sufficient condition for the linearity of regression of y on x, for all values of a and b, is that ξ and α should be normally distributed.

S. Kaczmarz (Lwów).

Hsu, P. L.: A new proof of the joint product moment distribution. Proc. Cambridge Philos. Soc. 35, 336—338 (1939).

Soient km variables x_{ir} $(i=1,2,\ldots,k; r=1,2,\ldots,m)$ obéissant à une loi nor-

male, la densité de probabilité étant

$$|\,c_{ij}|^{\frac{1}{2}m}\,(2\pi)^{-\frac{1}{2}km}\exp\Bigl[-\tfrac{1}{2}\sum_{i,j=1}^k c_{ij}\,s_{ij}\Bigr] \quad \text{ où } \quad s_{ij}=\sum_{r=1}^m x_{ir}\,x_{jr}$$

(les c_{ij} sont des paramètres, $i, j = 1, 2, \ldots, k$). — L'auteur montre, par un raisonnement récurrent, que les $\frac{1}{2}k(k+1)$ variables s_{ij} obéissent à une loi dont la densité est

$$|c_{ij}|^{\frac{1}{2}m}|s_{ij}|^{\frac{1}{2}(m-k-1)} 2^{-\frac{1}{2}km} \pi^{-\frac{1}{2}k(k-1)} \exp\left[-\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{k} c_{ij} s_{ij}\right] : \prod_{i=1}^{k} \Gamma\left\{\frac{1}{2}(m-i+1)\right\}$$

en tous les points où la matrice $||s_{ij}||$ est définie positive. Partout ailleurs, la densité est nulle. Ville (Paris).

Tukey, J. W.: On the distribution of the fractional part of a statistical variable.

Rec. math. Moscou, N. s. 4, 561-562 (1938).

Soit x une variable aléatoire dont la fonction de distribution F(x) est absolument continue; il en résulte (voir P. Kosulajeff, Rec. math. Moscou, N. s. 2, 1017—1019; ce Zbl. 18, 117) que la distribution de la partie fractionnaire de σx tend vers la distribution uniforme, si $\sigma \to \infty$. Ce résultat est une conséquence du théorème suivant: Pour que la partie fractionnaire de σx tende vers une distribution uniforme, si $\sigma \to \infty$, il faut et il suffit que la transformée de Fourier A(u, F) de la fonction de distribution de x tende vers zéro, si $|u| \to \infty$.—L'auteur ramène la démonstration de ce théorème au théorème suivant (voir A. Zygmund, Trigonometrical Series, 1935, 82; ce Zbl. 11, 17): La condition nécéssaire et suffisante pourque $f_m(x) \to f(x)$ en tout point de continuité, est exprimée par ce que les constantes de Fourier de $f_m(x)$ tendent vers celles de $f_0(x)$.

B. Hostinský (Brünn).

Neyman, J.: On statistics the distribution of which is independent of the parameters involved in the original probability law of the observed variables. Statist. Res.

Mem., Univ. London 2, 58-59 (1938).

Denote by $p(E, \vartheta)$ the elementary probability law of n random variables $(x_1, x_2, \ldots x_n) = E$, with the parameter ϑ . Let $\varphi = \frac{\partial \log p}{\partial \vartheta}$ be the logarithmic derivative of p and z any function of the x's independent of ϑ . Then it is necessary and sufficient for the probability law p(z) of z to be independent of ϑ , that the regression of φ on z shall be equal to zero for almost all values of z, for which p(z) > 0 and for all ϑ .

S. Kaczmarz (Lwów).

Hartman, Philip, E. R. van Kampen and Aurel Wintner: Asymptotic distributions

and statistical independence. Amer. J. Math. 61, 477-486 (1939).

The theory of the distribution problem of functions independent in the sense of Kolmogoroff and of Steinhaus has been developed for the case of a finite interval. For the complete infinite range, averaging must replace integration. The present paper aims to remove the difficulties thus raised by establishing the connection between the theory of independent functions and that of convolutions, despite unsolved problems with regard to discontinuities for almost periodic functions. Although the notions of statistical independence and statistical independence in the additive sense are

shown to be not equivalent, yet if given real, measurable, scalar functions are statistically independent in the additive sense for arbitrary real scalar multipliers, then the given functions are statistically independent. If k scalar functions $x^{j}(t)$ of t are statistically stically independent, then the scalar function $u \cdot x(t)$ for constant u, has an asymptotic distribution function which is the convolution of the asymptotic distribution functions of the k scalar functions $u^j x^j(t)$ of t, where each u^j is constant. The converse is also true. The pathology of the relative measure in the case of statistically independent functions appears to be essentially milder than in the general case. Numerous counter-examples are referred to in connection with restrictions upon converse theorems.

Albert A. Bennett (Providence).

Mittmann, Otfrid: Über die Erfolgsaussichten von Maßnahmen gegen Erbkrankheiten. Arch. math. Wirtsch.- u. Sozialforschg 4, 120-136 u. 169-182 (1938).

The author, after certain general remarks upon the availability and limitations of mathematical methods for studying problems of inheritance in a human population, investigates the mathematical prospects of success for measures against inheritance of disease. It is assumed that the diseased have a diminished natural rate of propagation. although heterozygotic diseased propagation tends to be increased. Various limiting proportions are approached according to circumstances. A natural tendency for segregation between healthy and diseased (when the physical effects of disease are conspicuous) may be assumed rather than complete randomness. The effects of systematic sterilization of the diseased through one or more generations are studied with regard to dominant and recessive characteristics, by means of formulas and derived numerical tables. A pronounced effect is securable in a single generation by restrictive mating. Albert A. Bennett (Providence).

Versicherungsmathematik und verwandte Anwendungen:

Ruchti, Werner: Analytische Ausgleichung durch Polynome mit einer Anwendung auf die schweizerischen Volkssterbetafeln. Bern: Diss. 1937. 79 S. Identisch mit der in dies. Zbl. 18, 227 besprochenen Arbeit.

Myslivec, V.: Paretos Funktion und ihre Anwendung zur rationellen Berechnung der Versicherungstarife in der Automobilversicherung. Arch. math. Wirtsch.- u. Sozialforschg 5, 51—68 (1939).

Verf. analysiert die Schadensverteilung innerhalb der Automobilversicherung unter der Voraussetzung, daß die Verteilung der Schäden X dem Paretoschen Gesetze $f(X) = A \cdot X^{-g}$ folgt. W. Simonsen (Kopenhagen).

Bonferroni, C. E.: Sul calcolo di un accumulo. Giorn. Ist. Ital. Attuari 9, 318-337 (1938).

Es wird das Saldo R(x), im Zeitpunkt x untersucht, welches entsteht, wenn an festgesetzten Terminen s Einzahlungen Ps erstattet werden, während an Terminen t, Bruchteile θ_{st} der angesammelten Erträge $P_s f(s,t)$, die nach dem Kapitalisierungsgesetze f(s,t) erfolgen, ausgezahlt werden. Zwei Fälle werden hier in Betracht gezogen. Entweder erfolgen die Ein- und Auszahlungen aus einer und derselben Kasse ("operazione ad una cassa") oder es handelt sich um eine "Kapitalisierung auf zwei Kassen" (operazione a due casse), wo in der ersten Kasse nur Einzahlungen angesammelt werden, während die zweite mit Schulden für die erfolgten Auszahlungen belastet wird. Verf. führt entsprechende Formeln für beide Fälle aus und geht von diesen zu Formeln für das kontinuierliche Verfahren [also mit P(s) ds und $\theta_s(t)$ dt an Stelle von P_s und θ_{st} ; P(s), $\theta_s(t)$ stetig über. Er zeigt ferner, daß letztere Formeln auch "indirekt" aus Volterraschen Integralgleichungen 2. Art ermittelt werden können. Ist f(s,t), multiplikativ", f(s,t) = f(s,u) f(u,t), dann führen beide Arten von Kapitalisierungen zu identischen Resultaten. - Im Falle der Kapitalisierung auf eine Kasse betrachtet der Verf. außer R(x) noch $R(x, \omega)$, das auf den Zeitpunkt ω bezogene Saldo vom Zeitpunkt x und stellt es dem "capitale accumulato" von Cantelli (vgl. dies. Zbl. 20,

153) gegenüber. Es wird gezeigt daß diesem andere finanzielle Voraussetzungen zugrunde liegen, als es in der vorliegenden Arbeit angenommen wurde. Der Spezialfall "proportioneller Erhebungen", $\theta_{st} = \theta_t$, hat hier eine besondere Bedeutung. Die Arbeit steht in engem Zusammenhange mit früheren Arbeiten des Verf. [Giorn. Mat. Finanz. 4 (1924); Facoltà di sci. econ. e commerc., Bari, "Annuario 1926/7" und Arch. Sci. 1/2 (1927/9); Atti del X. Congr. Int. degli Att., Roma 1934; Giorn. Ist. Ital. Attuari 7, 131; dies. Zbl. 15, 168].

Kolodziejczyk (Warschau).

Bijl, D.: Unkostenanalyse. Verzekerings-Arch. 20, (16)-(20) (1939) [Holländisch]. Ricci, Umberto: Die Verteuerung einer monopolisierten Ware durch eine Verbrauchssteuer. Arch. math. Wirtsch.- u. Sozialforschg 5, 11—22 (1939).

Auf ein Erzeugnis, dessen Verkauf monopolisiert ist, soll eine Verbrauchssteuer gelegt werden. Verf. beweist mit Hilfe des Begriffs des Grenzgewinns, daß sich durch die Einführung der Verbrauchssteuer der Preis erhöht. Die Zunahme des Preises kann kleiner, gleich oder größer als die Steuer sein, je nach der Gestalt der Nachfragekurve. Zum Schluß gibt Verf. auch noch Nachfragekurven an, die im Vergleich zur Steuer einen größeren, kleineren oder gleichen Preiszuwachs bestimmen können je nach der Größe der Steuer.

K. Löer (Göttingen).

Numerische und graphische Methoden.

Cronvich, L. L.: On the Graeffe method of solution of equations. Amer. Math. Monthly 46, 185-190 (1939).

Beim Graeffeschen Verfahren zur Auflösung einer algebraischen Gleichung n-ten Grades bildet man bekanntlich der Reihe nach Hilfsgleichungen n-ten Grades, deren Wurzeln die 2., 4., 8. Potenzen usw. der Wurzeln der Ausgangsgleichung sind. Die Koeffizienten der Ausgangsgleichung und der Hilfsgleichungen werden zeilenweise in einer Tabelle zusammengefaßt. Verf. unterscheidet in diesen Tabellen reguläre, oszillierende und irreguläre Vertikalspalten und stellt Regeln zusammen, nach denen man aus der Art der Spallen auf Realitäts- und Multiplizitätseigenschaften der Wurzeln der Ausgangsgleichung schließen kann. Diese Regeln sind eine Verfeinerung der von Hutchinson [Amer. Math. Monthly 42, 149—161 (1935); dies. Zbl. 11, 128] angegebenen Vorschriften. Bezüglich der Beweise verweist Verf. auf Hutchinson. R. Sauer (Aachen).

Weise, E., und G. Patzer: Genauigkeit und Zeitaufwand bei Ausgleichsverfahren. Z. techn. Physik 20, 59-62 (1939).

Se T è la temperatura assoluta, ϱ la resistenza di un conduttore, tra $y=\ln\varrho$, e x=I/T vale una relazione lineare y=ax+b. Gli A., operando su un certo numero (successivamente 5, 10, 20) di misure, applicano i vari metodi di compensazione delle osservazioni (Ausgleichsverfahren), per determinare a e b (metodi di Gauss, Werkmeister, Awbery, Campbell-Mayer, e il metodo grafico) e confrontano i risultati ottenuti dal punto di vista dell'esattezza e del risparmio di tempo. Luigi Beretta.

Tarkhov, A.: On the parabolic equalization of unequally accurate observations. Ž. eksper. teoret. Fis. 9, 96—105 (1939) [Russisch].

Ruchti, Werner: Analytische Auswertung des Kingschen Glättungsprinzipes. Mitt. Vereinig. schweiz. Versich.-Math. H. 37, 67-70 (1939).

Um die Vorteile der analytischen Ausgleichung statistischer Beobachtungsreihen mit der Schmiegsamkeit des bekannten mechanischen Glättungsverfahrens nach G. King zu vereinen, schlägt der Verf. das Einpassen "oskulierender" Parabeln 3. Ordn. vor, von denen jede in einem bestimmten Ausschnitt Gültigkeit hat. Die Übergangsstellen und die Tangentenrichtungen in ihnen können dabei mit beliebigen, aber nicht zu kleinen Intervallen nach irgendeinem Verfahren ermittelt werden.

H. Fuhr (Gießen).

Schumann, T. E. W.: A general graduation formula for the smoothing of time

series. Philos. Mag., VII. s. 26, 970—983 (1938).

In den Punkten $x = r \ (r = 1, 2, ..., n)$ seien die Werte y_r gegeben. Gesucht werden ausgeglichene Werte u_r unter folgenden Annahmen: In der x-y-Ebene wird in den Endpunkten $[x = 0, y = u_0]$ und $[x = (n + 1), y = u_{n+1}]$ ein Faden befestigt. Er verläuft geradlinig zwischen den Punkten u_r ; dort greifen Federn an, die den Faden, nach oben oder unten, in die gegebenen Punkte y_r hineinziehen, mit Kräften proportional $(y_r - u_r)$, denen die Spannung des Fadens entgegenwirkt. Wenn der Faden nicht zu steil verläuft, lautet die Gleichgewichtsbedingung, mit den Konstanten P und T für Feder- und Fadenspannung, $P(y_r - u_r) + T(u_{r-1} - u_r) + T(u_{r+1} - u_r) = 0$. Wenn noch $\sum u_r = \sum y_r$, $u_0 = u_1$, $u_{n+1} = u_n$ vorausgesetzt wird, so lassen sich diese Rekursionsgleichungen allgemein lösen; jedes u_r erscheint als lineare Funktion sämtlicher u_r , mit Koeffizienten die von dem Parameter $\alpha = T/(2T + P)$ als lineare Funktion sämtlicher y_r , mit Koeffizienten, die von dem Parameter $\alpha = T/(2T+P)$ abhängen. α liegt zwischen 0 (geringste Glättung, $u_r = y_r$) und 0,5 (stärkste Glättung, gerade Linie). Für großes n ist, weit genug von den Enden, mit dem Parameter $q = 2\alpha/[1 + (1 - 4\alpha^2)^{\frac{1}{2}}]$, einfach $u_r = [(1-q)/(1+q)] \cdot [y_r + q(y_{r-1}+y_{r+1}) + q^2(y_{r-2}+y_{r+2}) + \cdots]$. Diese "Gleichgewichtsmethode" führt auf dieselben Formeln wie eine Minimumsforderung, die in Whittaker und Henderson eingeführt wurde, nämlich $k \sum (y_r - u_r)^2 + \sum (u_{r+1} - u_r)^2 = \text{Min.};$ mit $\alpha = 1/(2+k)$ ist die Äquivalenz hergestellt. — Zahlenbeispiele.

Avrami, Melvin: A method for the direct determination of crystal structure from

X-ray data. Z. Kristallogr. A 100, 381—393 (1939). Seien (x_j, y_j, z_l) , $0 \le x_j, y_j, z_l \le 1, j = 1, 2, \ldots, m$, die unbekannten Koordinaten der in einer Einheitszelle kristallinischer Struktur enthaltenen m Atome; sei $|F_{hkl}|^2$ die experimentell meßbare Intensität des Röntgenstrahlenbündels, das zu den Laue-Indizes (h, k, l)gehört. Dann hat man $F_{hkl} = \sum_{j=1}^{m} f_j(h, k, l) \exp(-2\pi i (h x_j + k y_j + l z_j))$ (1), wo die reellen Größen $f_j(h, k, l)$ für experimentell bekannt gelten können und von der Art des Experiments abhängen. Da mit guter Approximation $f_j(h, k, l) = f_j f(h, k, l)$, wo f_j unabhängig ist von h, k, l und f(h, k, l) von f_j setzt der Verf. an Stelle von (1) $F_{hkl}/f(h, k, l)$ $=\sum_{i=1}^{\infty}f_{i}\exp\left(-2\pi i(hx_{i}+ky_{i}+lz_{i})\right)$ (2). Wenn Intensität und Phase, d. h. die (komplexen) Zahlen F_{hkl} , der gebeugten Strahlenbündel bekannt sind, so gilt die Fundamentalgleichung $a_0 + a_1 \alpha + \cdots + a_m \alpha^m = 0$ (3), deren Wurzeln die Werte $\alpha_j = \varrho^{-2\pi i x_j}$, $j = 1, 2 \dots m$, sind und deren Koeffizienten leicht mit Hilfe der bekannten F/f errechnet werden können. Die Lösung der Gleichung (3) erlaubt also die Bestimmung der α_j und hiermit die der Unbekannten x_j . Wenn, wie es im allgemeinen der Fall ist, nur die Intensitäten bekannt sind, leitet der Verf. von (2) eine reziproke algebraische Gleichung (Fundamentalgleichung) m(m-1)ten Grades ab (also auf eine Gleichung m(m-1)/2-ten Grades reduzierbar), deren Wurzeln die Werte $e^{-2\pi i(x_j-y_j)}$ sind und deren Koeffizienten mittels der bekannten $|F|^2/f^2$ errechnet werden können. Auch hier lassen sich die $x_j, j=1,2,\ldots,m$, leicht finden. In analoger Weise werden dann y_j und z_j errechnet, $j=1,2,\ldots,m$. Der Verf. zeigt endlich, wie die obengenannte allgemeingültige Methode in der Praxis außerordentlich vereinfacht und der m-te [oder m-te [oder m-te] m(m-1)-te] Grad erniedrigt werden kann, wenn man die vielen Daten heranzieht, die eine qualitative Untersuchung der experimentellen Ergebnisse liefern kann. Dies wird vom Verf. an dem Beispiel KH₂PO₄ erläutert. Hierzu genügt es, eine einfache reziproke Gleichung 4. Grades zu lösen. Die Resultate stimmen mit den Westschen überein. Wenn der m-te [oder m(m-1)-te] Grad der Fundamentalgleichung etwas hoch wird, gibt es verschiedene, sehr rasch konvergierende Methoden zu ihrer Lösung. [Z. B. den Graeffeschen Algorithmus auf die aus (3) transformierte Gleichung mit den Wurzeln $\alpha_j + 1$; der Graeffesche Algorithmus kann nicht direkt auf (3) angewendet werden, weil in (3) alle Wurzeln $\alpha_j = e^{-2\pi i x_j}$ denselben Modul I haben. Ref.] Unabhängig von der Lösung der Fundamentalgleichung schlägt der Verf. einen neuen Algorithmus zur Errechnung der a, vor. L. Cesari (Pisa).

Wald, A.: Long cycles as a result of repeated integration. Amer. Math. Monthly 46,

136—141 (1939).

Soit x(t) une fonction de la variable $t(0 \le t \le L)$ et posons

$$S_0(t) = x(t) - \frac{1}{L} \int_0^L x(t) \, dt, \quad S_{n+1}(t) = \frac{2\pi}{L} \left[\int_0^t S_n(s) \, ds - \frac{1}{L} \int_0^L (L-s) S_n(s) \, ds \right].$$

La différence $\delta_n = S_n(t) - A \cos\left(\frac{2\pi t}{L} + \alpha - \frac{n\pi}{2}\right)$ tend vers zéro pour $n \to \infty$; $A \cos(\alpha + 2\pi t/L)$ représente le premier terme du développement de Fourier de la fonction x(t) non identiquement égal à zéro. Ce théorème démontré par E. J. Moulton (voir ce Zbl. 20, 40) a été appliqué par l'auteur au cas où les valeurs a_1, a_2, \ldots de la fonction x(t) sont données par l'observation pour certaines valeurs de t; les valeurs a_1, a_2, \ldots sont considérées comme des variables aléatoires. L'auteur démontre des théorèmes sur la probabilité pour que δ_n reste comprise entre des limites données. — La méthode de Moulton qui consiste à trouver le premier terme du développement de Fourier de x(t) pourra être appliquée même pour trouver le second, le troisième . . . Elle est analogue de la méthode de sommation des ordonnées d'une courbe qui a été employée par H. Labrouste [Analyse des courbes résultant de la superposition des sinusoïdes; C. R. Acad. Sci. 184, 259 (1927)] et qui a été exposée par K. Stumpff (Grundlagen und Methoden der Periodenforschung, Kap. V, 5; ce Zbl. 16, 319). B. Hostinský.

Popesco, Al. Th.: I. Note sur les formules de M. E. Abason pour l'analyse harmonique des fonctions de période quelconque, par la méthode des discontinuités. II. Sur l'article de M. Abason: "Sur le coefficient de déformation d'une fonction non sinusoïdale".

Bull. Math. Phys. Ecole polytechn. Bucarest 9, 81-82 (1938).

Verf. weist auf einen Fehler in der Abasonschen Darstellung [C. R. Congr. Internat. Electricité Paris 6, 4° section 688 (1932)] des Sprungstellenverfahrens zur harmonischen Analyse hin (über dieses vgl. z. B. G. Koehler und A. Walther, dies. Zbl. 3, 66).

Theodor Zech (Darmstadt).

Popesco, Al. Th.: Sur l'application de la méthode des discontinuités à l'analyse harmonique des fonctions sinusoidales. Bull. Math. Phys. École polytechn. Bucarest 9,

83-85 (1938).

Das Sprungstellenverfahren (vgl. vorst. Referat) versagte in der ursprünglichen Fassung infolge Divergenz der auftretenden Reihen gerade bei den niedrigen Harmonischen der elektrotechnisch so wichtigen stückweise sinusförmigen Kurven. Unter Anwendung des Prinzips der Permanenz der Funktionalgleichung auf die Fourierkoeffizienten a_n und b_n als Funktionen von n dehnte A. Walther (vgl. dies. Zbl. 6, 124) das Sprungstellenverfahren auch auf diese Fälle aus. Verf. kündigt — unter Betonung der grundsätzlichen Richtigkeit dieses Vorgehens — die Aufklärung von Fehlanalysen an, die bei unvorsichtiger Anwendung des Waltherschen Verfahrens zustande kommen können. Nach dem beigegebenen Beispiel handelt es sich um Erscheinungen, die der Ref. schon bald nach Druck des Waltherschen Aufsatzes zur Beantwortung von Anfragen klärte: Zur Anwendung des genannten Prinzips muß man n stetig (nicht nur ganzzahlig) veränderlich voraussetzen. Damit werden gewisse Vereinfachungen, wie $\sin 2\pi n = 0$ u. dgl., unzulässig, die in den Formeln der ersten Arbeit (Koehler-Walther) zu Recht, von manchen Benutzern der zweiten Arbeit (Walther) aber zu Unrecht vorgenommen werden. Theodor Zech.

Pollak, Leo Wenzel: Über die Verwendung des Tonfilms zur harmonischen Analyse.

Z. Instrumentenkde 59, 208—210 (1939).

Verf. beschreibt die Überwindung technischer Schwierigkeiten bei der harmonischen Analyse mittels Tonfilmapparatur und Wellenanalysator. Die zu analysierende Kurve wird mit einer etwas abgeänderten Kleinfilmkamera hinreichend oft zwischenraumfrei auf ein endloses Filmband reproduziert, mit Tonfilmapparatur in Spannungsschwankungen umgesetzt, und diese werden nach Verstärkung mit einem Wellenanalysator (mittels Resonanz) analysiert. Das Verfahren ist zur raschen Aufsuchung von Amplituden, nicht von Phasen geeignet. Seine Einsetzung lohnt sich bei Bearbeitung umfangreichen Materials. *\(\begin{array}{c} \text{Heodor Zech.} \end{array} \)

Walther, A., H.-J. Dreyer und H. Estenfeld: Ein Gerät zur Überlagerung von Sinus-

linien. Z. Instrumentenkde 59, 162—168 (1939).

Es wird ein Gerät beschrieben, das vier genäherte Sinusschwingungen mit nach Bedarf einstellbarer Amplitude und Phasenlage aus Drehzeigerbewegungen erzeugt, zusammensetzt und aufschreibt. Die Umlaufszahlen der Drehzeiger verhalten sich wie 1:2:3:5. Die Überlagerung der Schwingungen erfolgt wie bei den Gezeitenrechenmaschinen von Roberts [Engineer 48, 447—448, 450 (1879)] und H. Rauschelbach [Z. Instrumentenkde 44, 285—303 (1924)]. Das Gerät eignet sich zur Synthese der 1. + 2. + 3. und der 1. + 3. + 5. Harmonischen; der Aufbau der Dreieck- und Rechteckkurve, der Einfluß der gegenseitigen Phasenlage der Teilschwingungen, die Gibbssche Erscheinung und die Fejérschen Mittel werden anschaulich erfaßt. Durch eine Umschaltung im Getriebe ist es möglich, die Umlaufgeschwindigkeiten der beiden

ersten Zeiger gleichzumachen, um zwei Schwingungen gleicher Frequenz zusammenzusetzen bzw. die der beiden letzten Zeiger von 3:5 auf 15:19 abzuändern, um Schwebungen zu erzeugen. Das Gerät wird unter dem Namen "Schwingungserzeuger Darmstadt" von Max Kohl, Chemnitz, in den Handel gebracht. H. Fuhr (Gießen).

Vâlcovici, V.: Le problème de l'autoréducteur à l'horizon. Bull. Math. Phys. École

polytechn. Bucarest 9, 75-81 (1938).

Der Landmesser kennt mancherlei Instrumente, die die Reduktion schief gemessener Längen auf den Horizont erleichtern. Demselben Zweck dient der Autoreduktor des Verf., eine Röhrenlibelle, die mit dem einen Ende eines Längenmeßgerätes starr verbunden ist und deren Luftblase bei beliebigem Neigungswinkel α der Meßstrecke stets die Horizontalentfernung 1 vom anderen Endpunkt des Meßgerätes hat. Der Verf. untersucht eingehend die Kurve, nach der die Röhre der Libelle gebogen werden muß. Er findet eine Spirale mit den Gleichungen

 $x = -1 + \cos \alpha + \alpha \sin \alpha$, $y = -\sin \alpha + \alpha \cos \alpha$,

wenn die natürliche Beschränkung auf $\alpha < 90^{\circ}$ beiseite bleibt. Die Bogenlänge s und der Flächeninhalt von Sektoren dieser Spirale sind elementare Funktionen von α , ihr Krümmungshalbmesser wird $R = \sqrt{2}s$. Für kleine Neigungswinkel wird die Spirale durch eine Neilsche Parabel angenähert.

H. Fuhr (Gießen).

Werkmeister, P.: Untersuchung eines Integrimeters von A. Ott. Z. Instrumentenkde

59, 168—172 (1939).

Integrimeter sind Geräte, welche gestatten, beim Nachfahren einer Kurve y = y(x) punktweise das unbestimmte Integral $\int y(x) dx$ abzulesen. Verf. legt die Ergebnisse einer großen Anzahl von Kontrollmessungen über die Genauigkeit des Integrimeters von A. Ott, Kempten (Allgäu), vor. Die Unterschiede zwischen Soll- und Ist-Wert werden für verschiedene Kurven und für mehrere x-Werte in cm² angegeben und zusammenfassend als verschwindend klein bezeichnet.

Theodor Zech.

Lugeon, Jean: Un intégrateur pour coordonnées polaires, rectangulaires et curvilignes. C. R. Acad. Sci., Paris 208, 1874—1876 (1939).

Konstruktion und Anwendungen eines neuen Integrimeters mit Meßrolle.

Nyström.

Massey, H. S. W., J. Wylie, R. A. Buckingham and R. Sullivan: A small scale differential analyser, its construction and operation. Proc. roy. Irish Acad. A 45,

1-21 (1938).

Maschinen zur Lösung von Differentialgleichungen, die nach dem Vorgang von V. Bush, Mass. Inst. of Techn. in verschiedenen Teilen der Welt gebaut wurden und nicht geringe praktische Bedeutung erwarben, sind im allgemeinen recht kostspielig. Hier wird eine Maschine mit dem gleichen Zweck beschrieben, deren Herstellung — bei geringeren Genauigkeitsanforderungen — nach Angabe der Verff. weniger als £ 50 kostete. In Anordnung und manchen baulichen Einzelheiten dient die Bushmaschine als Vorbild. Die beschriebene Maschine ist in erster Linie zur Integration von z'' + f(x)z = 0 gedacht, wofür auch Anwendungsbeispiele gegeben werden. Bei einem Beispiel sind Zahlenergebnisse angegeben und bei 3stelligen Werten bis zu 16 Einheiten der letzten Stelle fehlerhaft. Die Beschreibung ist, auch in technischen Einzelheiten, ausführlich gehalten und mit vielen Skizzen und Photos versehen.

Pflanz, Erwin: Zur Bestimmung finiter Ausdrücke für die gemischten partiellen Ableitungen von Funktionen zweier Variabeln. Jber. Deutsch. Math.-Vereinig. 49, Abt. 1, 76—85 (1939).

Abt. 1, 76—85 (1939). Für gemischte partielle Ableitungen $\frac{\partial^{m+n}w(0,0)}{\partial x^m\partial y^n}$ werden finite Ausdrücke in geschlossener Form mit Restglied angegeben, die nicht mehr wie in einer früheren Arbeit des Verf. (vgl. dies. Zbl. 18, 324) die Werte von w in $(2p+1)^2$ Punkten eines quadra-

tischen Gitters, sondern nur noch in $p^2 + (p+1)^2$ Punkten bei demselben Approximationsgrad benötigen. Die neuen Ausdrücke sind daher für die numerische Rechnung viel bequemer. Zwei Beispiele erläutern die übersichtliche Art der Aufstellung der finiten Ausdrücke.

Collatz (Karlsruhe).

Heinrich, Helmut: Allgemeines über Leitkurven in Richtungsfeldern. Z. angew.

Math. Mech. 19, 55—56 (1939).

Im Richtungsfeld y'=f(x,y) hüllen die Linienelemente einer beliebigen Kurve $\varphi(x,y)=c$ im allgemeinen eine Kurve ein, die man "Strahlkurve" nennt. Gehen die Linienelemente alle durch einen Punkt, so nennt man diesen "Strahlpunkt". Bei Abänderung der Konstanten c durchwandert $\varphi(x,y)=c$ das Richtungsfeld und der Strahlpunkt eine Kurve, genannt "Leitkurve". Verf. weist — in Umkehrung dieses Gedankenganges — darauf hin, daß im Richtungsfeld jeder Differentialgleichung jede beliebige Kurve als Leitkurve angesehen werden kann. Jede Kurve, deren Linienelemente sich in einem festen Punkte der angenommenen Leitkurve schneiden, heißt "Isopunktale". Die Benutzung passend gewählter Leitkurven ist bei der Integration von Differentialkurven zweckmäßig, wenn die Isopunktalen leichter zu zeichnen sind als die Isoklinen. Als Beispiel wird eine Riccatische Differentialgleichung angeführt.

Theodor Zech (Darmstadt).

Efimenko, V.: Sur le calcul approché des valeurs caractéristiques et des fonctions caractéristiques dans les problèmes limites de la théorie des équations aux dérivées partielles. Bull. Acad. Sci. URSS, Sér. Math. Nr 5/6, 613—622 u. franz. Zusammenfassung

623 (1938) [Russisch].

Die Eigenwerte $\hat{\lambda}$ und die zugehörigen Eigenfunktionen der Differentialgleichung

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(p \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(q \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) - r \varphi + \lambda s \varphi = 0$$

mit der Randbedingung $\varphi=0$ auf der Berandung Γ eines einfach zusammenhängenden Gebietes können durch Differenzenmethoden bei hinreichend feinem Netz und ninreichend guter Approximation von Γ beliebig genau gefunden werden. Dabei wird über die Funktionen p, q, r, s von x, y und ihre Ableitungen bis zur dritten Ordnung vorausgesetzt, daß sie nach oben und unten durch positive Zahlen beschränkt sind. Der Rand Γ muß hinreichend glatt sein. Methodisch Anlehnung an Courant.

Theodor Zech (Darmstadt).

Richter, W.: Verwendung nomographischer Hilfsmittel für eine graphische Bestimmung der Bahnkurven bei der Längsbewegung eines Flugzeuges. Ing.-Arch. 10, 28—34 (1939).

Aus den nach W. Müller, Ing.-Arch. 9, 258 (1938), zitierten Differentialgleichungen für Schwerpunktsgeschwindigkeit v und Bahnwinkel φ eines Flugzeugs, das sich in einer senkrechten Ebene bewegt, lassen sich mit $z = \ln v$ die Gleichungen

$$\frac{dz}{d\varphi} = \frac{f_{12}(\varphi) - f_{22}(z)}{f_{11}(\varphi) - f_{21}(z)}, \qquad \frac{dv}{dt} = g_{12}(\varphi) - g_{22}(v), \qquad \frac{d\varphi}{dt} = \frac{h_{12}(\varphi) - h_{22}(v)}{0 - h_{21}(v)}$$

gewinnen, falls die Propellerkraft S entweder als von v oder als von φ allein abhängig angesehen wird. Die Richtungsfelder dieser Differentialgleichungen lassen sich nach H. Heinrich nomographisch, und zwar mit Funktionsleitern, darstellen, wodurch die zeichnerische Auflösung der Differentialgleichungen sehr erleichtert wird. Für ein Beispiel von W. Müller, das Gleiten eines Sportflugzeuges, wird die Lösung auf die angedeutete Weise durchgeführt und das Ergebnis in hinreichender Übereinstimmung mit dem von Müller gefunden. Diskussion von Sonderfällen. Theodor Zech.

• Luckey, Paul: Einführung in die Nomographie. 3., durchges. Aufl. (Math.-Phys. Biblioth. Reihe 1. Hrsg. v. W. Lietzmann u. A. Witting. Nr. 28.) Leipzig u. Berlin: B. G. Teubner 1939. IV, 59 S., 1 Taf. u. 33 Fig. RM. 1.20.

Durchgesehener Neudruck mit kleinen Ergänzungen. Ullrich (Gießen).